Глава XV

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Законы сил в классической механике и электродинамике. Ньютоновская физика основывается на движении точечных масс. Сила действующая на данную точечную массу, является результирующей сил, с которыми действуют на рассматриваемую точечную массу все остальные точечные массы в мире. Эта сила однозначно определяется положениями всех этих масс и остается конечной, пока ни одна из них не совпадает с рассматриваемой точечной массой.

Развитие электродинамики показало, что действующая на тело сила определяется не столь просто, как полагал Ньютон. Действие одного заряда на другой зависит не только от расстояния между ними но и от их относительного движения. С изменением скорости одного из зарядов меняется сила, с которой он действует на другой заряд. Это изменение силы не происходит, однако, мгновенно, так как возмущение электромагнитного поля распространяется с конечной скоростью, равной скорости света c. Поэтому сила, действующая на заряженную точечную массу, определяется не положениями всех остальных зарядов и даже не их положениями и скоростями, а электромагнитным полем в непосредственной окрестности рассматриваемой частицы.

Это электромагнитное поле невозможно разложить на составляющие поля, каждое из которых соответствовало бы действию одной из частиц, так как само поле не определяется однозначно движениями зарядов. Правда, поле определится однозначно положениями и скоростями зарядов, если на него наложить такие граничные и начальные условия, которые исключают волны, идущие к особой точке (сходящиеся волны). При этом оставляются только волны,

исходящие из особой точки (расходящиеся волны), хотя и те и другие формально являются решениями уравнений Максвелла. Однако неизвестно, соответствуют ли эти условия действительности, т. е. выполняются ли они в природе. Возможно, они являются следствием только наших механических представлений о том, что источником возмущений всегда должна быть точечная масса.

Во всяком случае, поле допускает адэкватную трактовку только, если оно рассматривается как целое, а не как сумма полей, соответствующих отдельным точечным массам. Тем не менее, рассмотрение законов движения требует разложения поля на две части: на поле, создаваемое рассматриваемой частицей, и поле остальных частиц. Поле точечного заряда имеет особенность в месте его нахождения. Для того чтобы получить закон сил, необходимо отбросить часть поля, содержащую особенность. Оставшееся поле, которое существовало бы в отсутствии частицы, определяет силу, действующую на частицу.

Такое разделение ни в какой мере не является, однако, однозначно определенной математической операцией. Движущаяся частица с заданными зарядом и скоростью может создавать различные типы полей: поле „запаздывающего потенциала“ (расходящиеся волны), поле „опережающего потенциала“ (сходящиеся волны) или смесь обоих типов волн. Эта неоднозначность не вызывает серьезных затруднений при практических применениях, пока ускорение рассматриваемых частиц невелико, т. е. пока поля излучения, связанные с частицей, малы в сравнении со стационарными полями (поле Кулона и поле Ампера).

Операция разделения полей, хотя и не является однозначной, все же имеет определенный смысл. Поскольку уравнения поля линейны и однородны, сумма двух их решений также будет решением. Поэтому разность между полным полем и полем, создаваемым частицей, также будет решением уравнений Максвелла, регулярным в месте нахождения частицы. Однако, несмотря на необходимость разделения полей для получения уравнений движения, эта операция остается противоречащей самой концепции поля.

Закон движения в общей теории относительности. В теории гравитации, казалось бы, дело должно обстоять еще хуже. Точечные массы представляют собой особенности гравитационного поля, и чтобы сформулировать закон сил необходимо знать поле, которое создалось бы в месте нахождения точечной массы, если бы последней там не было. В отличие от уравнений электромагнитного поля Максвелла, уравнения гравитационного поля нелинейны, и разность их двух решений сама не будет являться решением уравнений поля. Поэтому движение точечной массы возможно рассматривать только в таком поле, на которое наличие этой массы практически не влияет; таково, например, движение планет в поле Солнца. Истинная проблема двух тел, например двойных звезд, может рассматриваться только мало надежными приближенными методами, не основывающимися на строгой теории. По этой причине некоторые авторы получили противоречивые результаты уже в первом приближении, в котором сказываются релятивистские эффекты [1]).

В электродинамике закон движения заряда нельзя получить из уравнений поля; другими словами, может случиться, что заряд не подчиняется закону сил Лорентца, хотя уравнения поля Максвелла удовлетворяются. Действительно, в классической электродинамике это имеет место, когда на заряды, кроме сил Лорентца, действуют еще силы неэлектрического происхождения.

Иначе обстоит дело в теории гравитации. Точечные массы могут находиться под действием не только гравитационных сил. Однако негравитационные силы связаны с возникновением напряжений, плотности энергии и потоком энергии поля, т. е. они ведут к появлению тензора энергии-импульса и тем самым изменяют уравнения гравитационного поля.

Поэтому ясно, что связь между уравнениями поля и законом движения в теории гравитации должна быть сильнее, чем в электродинамике.

---

[1]) Robertson, Annals of Mathematics, **93**, 101 (1938), примечание на стр. 103 и 104.

Действительно, существуют важные указания на то, что уравнения поля для $g_{\mu\nu}$ не могут быть удовлетворены в окрестностях особых точек, если последние движутся не по мировым линиям, определяемым законом движения.

В конце главы XIII было показано, что не существует статических решений с осевой симметрией, соответствующих двум изолированным незаряженным покоящимся точечным массам. В 1937 г. А. Эйнштейн, Л. Инфельд и Б. Гоффман доказали, что движение точечных масс действительно определяется уравнениями поля[1]).

Приближенный метод. В релятивистской теории гравитации, так же как в электродинамике, электрические заряды и массы представляются особыми точками переменных поля. При наличии особенностей изменение поля во времени полностью не определяется. Рассмотрим, например, поле Шварцшильда. Вблизи начала координат имеется особая область, сферическая поверхность $r = 2\varkappa m$. Окружим эту особую область небольшой двумерной поверхностью S, снаружи которой поле везде регулярно и удовлетворяет уравнениям поля.

Поле Шварцшильда статично. Однако если мы ничего не знаем относительно поля внутри S, то может возникнуть излучение электромагнитных или гравитационных волн через поверхность S изнутри наружу. Если это излучение имеет преимущественное направление, произойдет „отдача", т. е. ускорение всей особой области в противоположном направлении.

Другими словами, нельзя ожидать, что закон движения справедлив для всякой особенности. Движение особенности

---

[1]) Annals of Mathematics, **39**, 65 (1938). В более поздней статье A. Einstein'a u L. Infeld'a, Annals of Mathematics, **41**. 455, (1940) содержатся важные поправки к первой статье. [Полный вывод уравнений движения из уравнений гравитационного поля независимо от указанных авторов был дан В. А. Фоком. ЖЭТФ, **9**, 375 (1939). (*Прим. ред.*)]

может быть определено, если она не является источником излучения. Поэтому закон движения может быть получен только в предположении, что особенность является и остается простым полюсом (уравнения поля могут также иметь решения, соответствующие „диполям масс“ и т. п.) и что не происходит спонтанного излучения.

Эти условия трудно сформулировать инвариантным образом. Существуют, например, гравитационные волны, связанные с ускоренным движением точечной массы. Различие между „спонтанными“ волнами и „гравитационным тормозным излучением“ имеет простой физический смысл, однако его математическая формулировка не представляется возможной.

Чтобы избежать этих трудностей, Эйнштейн и его сотрудники вынуждены были получать законы движения с помощью приближенного метода, при котором математическая формулировка необходимых предположений значительно проще.

Их метод аппроксимации аналогичен обычному методу, описанному в главе XII, который в первом приближении приводит к „линеаризации“ уравнений поля. Однако он отличается от последнего одним важным обстоятельством. Предположение, что спонтанного излучения не происходит, эквивалентно предположению, что переменные поля меняются со временем не быстрее, чем этого требует движение особенности. Скорость последнего мала в сравнении со скоростью света. Поэтому предполагается, что дифференцирование по ξ^4 (измеренному в релятивистских единицах) приводит к величинам высшего порядка.

Это предположение можно сформулировать несколько иным способом. Если снова ввести метрические единицы (т. е. если в качестве метрического тензора плоского пространства использовать $\eta_{\rho\sigma}$ вместо $\varepsilon_{\rho\sigma}$), скорости материальных тел будут порядка единицы, а дифференцирование переменных поля по ξ^4 не будет менять их порядка величины. С другой стороны, c^{-2} будет тогда рассматриваться, как малая величина, которая может служить параметром разложения переменных поля в степенные ряды

(параметр λ главы XII). Тензор $g_{\mu\nu}$, например, примет вид

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 + c^{-2}\underset{1}{h}_{44} + c^{-4}\underset{2}{h}_{44} + c^{-6}\underset{3}{h}_{44} + \ldots, \\ g_{4s} &= \qquad\qquad c^{-4}\underset{2}{h}_{4s} + c^{-6}\underset{3}{h}_{4s} + \ldots, \\ g_{rs} &= -c^{-2}\delta_{rs} + c^{-4}\underset{2}{h}_{rs} + c^{-6}\underset{3}{h}_{rs} + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (15.1)$$

Член $c^{-2}\underset{1}{h}_{4s}$ опускается, так как в противном случае g^{4s} было бы порядка единицы, в связи с чем первое приближение стало бы нелинейным. Как и в главе XII, введем величины $\gamma_{\mu\nu}$ при помощи уравнений

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (15.2)$$

$\gamma_{\mu\nu}$ также разложим в степенные ряды по c^{-2}:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{44} &= c^{-2}\underset{1}{\gamma}_{44} + c^{-4}\underset{2}{\gamma}_{44} + \ldots, \\ \gamma_{4s} &= \qquad\qquad c^{-4}\underset{2}{\gamma}_{4s} + c^{-6}\underset{3}{\gamma}_{4s} + \ldots, \\ \gamma_{rs} &= \qquad\qquad c^{-4}\underset{2}{\gamma}_{rs} + c^{-6}\underset{3}{\gamma}_{rs} + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (15.3)$$

Покоящиеся точечные массы представляются решениями уравнений поля, которые в первом приближении даются уравнениями (12.31а) и (12.34) или в метрических единицах выражениями

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\gamma}_{44} &= -\frac{4\varkappa M}{r}, \\ \underset{2}{\gamma}_{4s} &= 0, \\ \underset{2}{\gamma}_{rs} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (15.4)$$

Поэтому предположим, что величины $\underset{2}{\gamma}_{rs}$ равны нулю. Для получения в том же приближении поля точечной массы

нужно произвести преобразование Лорентца; $g_{\mu\nu}$ преобразуется согласно закону:

$$g^*_{\mu\nu} = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta g_{\alpha\beta}, \tag{15.5}$$

где γ_μ^α имеют те же значения, что и в главе V (уравнение (5.111)). Величины $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu},$$

преобразуется по тому же закону, что и $g_{\mu\nu}$, так как закон преобразования линеен, и $\eta_{\mu\nu}$ остаются неизменными.

По тому же закону преобразуются и $\gamma_{\mu\nu}$, что может быть проверено непосредственным вычислением. Применяя эти законы преобразования к уравнению (15.4), получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^*_{44} &= (\gamma_4^4)^2 \gamma_{44}, \\ \gamma^*_{4s} &= \gamma_4^4 \gamma_s^4 \gamma_{44}, \\ \gamma^*_{rs} &= \gamma_r^4 \gamma_s^4 \gamma_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

Коэфициенты γ^4_4 отличаются от единицы только малыми величинами — порядка c^{-2}. Коэфициенты γ^4_s представляются выражениями

$$\gamma^4_s = \eta_{sr}\eta^{44}\gamma^r_4 = -\frac{1}{c^2}\gamma^s_4 = -\frac{1}{c^2}\frac{u_s}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{15.7}$$

и таким образом являются малыми величинами порядка c^{-2}. Отсюда видно, что величины γ^*_{4s}, к которым приводит преобразование, того же порядка, а величины γ^*_{rs} — порядка c^{-4}. Величины $\underset{2}{\gamma}_{rs}$ для поля точечной массы исчезают, даже если эта масса движется.

В первом приближении естественно принять, что полное поле является просто суммой полей различных точечных масс. Разложение γ_{rs} будем начинать, согласно сказанному, с члена, содержащего c^{-6}.

Подставляя разложения (15.1) и (15.3) в уравнения поля и приравнивая коэфициенты при членах с одинаковыми степенями c^{-2}, получим ряд систем уравнений. Метод

Эйнштейна, Инфельда и Гофмана и заключается в получении и решении таких систем уравнений. Каждая последующая система уравнений содержит ряд величин $\underset{n}{\gamma}_{\rho\sigma}$, не входивших в предыдущие системы, и, кроме того, ряд других $\underset{n}{\gamma}_{\rho\sigma}$, определенных ранее. „Новые" величины всегда входят линейно, так что на каждой последующей стадии приближенного метода приходится решать только линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Определение движения особенностей производится следующим образом. На каждой стадии метода приближения нужно решить десять линейных неоднородных уравнений относительно десяти величин $\underset{n}{\gamma}_{\rho\sigma}$. Левые части этих уравнений, содержащие еще неизвестные величины, не независимы друг от друга, а удовлетворяют четырем дифференциальным тождествам. Если правые части (которые содержат уже определенные величины) не удовлетворяли бы тем же тождествам, дифференциальные уравнения были бы не совместимы друг с другом. Таким образом, каждая стадия приближенного метода налагает условия на предыдущую. В отсутствии особенностей эти условия ничего не дают, однако при наличии особенностей они являются как раз уравнениями движения.

Эйнштейн и его сотрудники при помощи этого метода довели вычисления до той стадии, на которой начинают сказываться релятивистские эффекты. Мы ограничимся приближением, приводящим к классическим уравнениям движения, так как на этой стадии уже можно видеть связь между уравнениями поля и уравнениями движения.

Разложим компоненты тензора кривизны, символы Кристоффеля и ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора в степенные ряды по c^{-2} и приравняем коэфициенты разложения по индексам, написанным под каждым символом, причем нижний индекс n будет относиться к коэфициенту при c^{-2n}. Например, $\underset{0}{G}_{44}$ будет означать ту часть G_{44}, которая умножается на c^0;

$\underset{3}{h}_{rs}$ — ту часть h_{rs}, которая умножается на c^{-6}, и так далее.

Используя выражения для метрического тензора (15.1), найдем, что разложения в ряды компонент $G_{\mu\nu}$ начинаются со следующих степеней c^{-2}: G_{44} — c^0, G_{4s} и G_{rs} — c^{-2}. В дальнейшем нам понадобятся только первые неисчезающие члены разложения каждой компоненты, т. е. $\underset{0}{G}_{44}$, $\underset{1}{G}_{4s}$, $\underset{1}{G}_{rs}$, и, кроме того, величина $\underset{2}{G}_{rs}$. Чтобы получить их значения, вычислим $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, символы Кристоффеля первого и второго рода и $R_{\rho\sigma}$, с точностью до членов с c^{-2}.

Первое приближение и закон сохранения массы. В первом приближении используем следующие значения компонент:

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{h}_{44} &= \frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44}, \\ \underset{2}{h}_{4s} &= \underset{2}{\gamma}_{4s}, \\ \underset{2}{h}_{rs} &= \frac{1}{2}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

С их помощью образуем символы Кристоффеля первого рода:

$$\left.\begin{aligned} [\underset{1}{44}, 4] &= \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,4}, \\ [\underset{1}{44}, t] &= -\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,t}, \\ [\underset{1}{4r}, 4] &= \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,r}, \\ [\underset{2}{4r}, t] &= \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4t,r} - \underset{2}{\gamma}_{4r,t}) + \frac{1}{4}\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,4}, \\ [\underset{2}{rs}, 4] &= \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4r,s} + \underset{2}{\gamma}_{4s,r}) - \frac{1}{4}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,4}, \\ [\underset{2}{rs}, t] &= \frac{1}{4}(\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,s} + \delta_{st}\underset{1}{\gamma}_{44,r} - \delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,t}), \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

и символы Кристоффеля второго рода:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix}4\\44\\1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4},\\
&\left\{\begin{matrix}t\\44\\0\end{matrix}\right\}=\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,t},\\
&\left\{\begin{matrix}4\\4r\\1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,r},\\
&\left\{\begin{matrix}t\\4r\\1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4r,\,t}-\underset{2}{\gamma}_{4t,\,r})-\frac{1}{4}\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4},\\
&\left\{\begin{matrix}4\\rs\\2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4r,\,s}+\underset{2}{\gamma}_{4s,\,r})-\frac{1}{4}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4},\\
&\left\{\begin{matrix}t\\rs\\1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{4}(\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,\,t}-\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,\,s}-\delta_{st}\underset{1}{\gamma}_{44,\,r}).
\end{aligned}\right\}\qquad(15.10)$$

Для компонент метрического тензора получаем выражения

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{0}{R}_{44}=-\left\{\begin{matrix}t\\44\\0\end{matrix}\right\}_{,\,t}=-\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt},\\
&\underset{1}{R}_{4s}=\left\{\begin{matrix}4\\44\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s}+\left\{\begin{matrix}t\\4t\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s}-\left\{\begin{matrix}4\\4s\\1\end{matrix}\right\}_{,\,4}-\left\{\begin{matrix}t\\4s\\1\end{matrix}\right\}_{,\,t}=\\
&=-\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4s}+\frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4t,\,s}-\underset{2}{\gamma}_{4s,\,t})_{,\,t},\\
&\underset{1}{R}_{rs}=\left\{\begin{matrix}4\\r4\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s}+\left\{\begin{matrix}t\\rt\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s}-\left\{\begin{matrix}t\\rs\\1\end{matrix}\right\}_{t}=-\frac{1}{4}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt},\\
&\underset{0}{R}=\underset{0}{R}_{44}-\underset{1}{R}_{tt}=+\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt},
\end{aligned}\right\}\qquad(15.11)$$

а уравнения поля в первом приближении запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{0}{G}_{44} \equiv -\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt} = 0, \\ &\underset{1}{G}_{4s} \equiv -\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4s} + \frac{1}{2}\left(\underset{2}{\gamma}_{4t,\,s} - \underset{2}{\gamma}_{4s,\,t}\right)_{,\,t} = 0, \\ &\underset{1}{G}_{rs} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15.12)$$

В качестве решения первого уравнения можно выбрать выражение

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{\gamma}_{44} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\overset{k}{\mu}(\xi^4)}{\overset{k}{r}} \equiv \phi, \\ &\text{где} \\ &\overset{k}{r} = \{[\xi^1 - \overset{k}{y}{}^1(\xi^4)]^2 + [\xi^2 - \overset{k}{y}{}^2(\xi^4)]^2 + \\ &\qquad + [\xi^3 - \overset{k}{y}{}^3(\xi^4)]^2\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.13)$$

Это решение соответствует случаю N точечных масс. Все полюса высших порядков мы из рассмотрения исключили. Масса k-й точечной массы, согласно (12.34), равна:

$$\overset{k}{M} = \frac{1}{4\varkappa}\overset{k}{\mu}. \qquad (15.14)$$

Возможно предположить, что эта масса может еще зависеть от временной координаты ξ^4, но вскоре будет показано, что в действительности массы постоянны. $3N$ функций $\overset{k}{y}{}^s$ от ξ^4 определяют положения N точечных масс в каждый момент времени ξ^4.

Докажем теперь с помощью трех уравнений G_{4s}, что параметры $\overset{k}{\mu}$ (а поэтому и массы $\overset{k}{M}$) постоянны. Это до-

казательство проводится с помощью метода, последующий этап приближения которого способствует нам в выводе (классических) уравнений движения. Прежде всего докажем следующую лемму: если выражение, зависящее от нескольких индексов, антисимметрично по отношению к двум из них, скажем s и t, то его обыкновенная дивергенция по одному из этих индексов, скажем по t, эквивалентна ротору, компоненты которого характеризуются вторым (не немым) антисимметричным индексом (в нашем случае s). При этом, как обычно, предполагается, что s и t пробегают значения от 1 до 3. Доказательство проводится путем непосредственного составления интересующих нас величин. Пусть $A_{ik\ldots st}$ антисимметрично в s и t. Обозначим

$$A_{ik\ldots 12} = -A_{ik\ldots 21} \text{ через } B_3,$$
$$A_{ik\ldots 23} = -A_{ik\ldots 32} \text{ через } B_1 \text{ и}$$
$$A_{ik\ldots 31} = -A_{ik\ldots 13} \text{ через } B_2.$$

Выражения $A_{ik\ldots 1t,\,t}$ тогда равны следующим:

$$A_{ik\ldots 1t,\,t} = B_{3,2} - B_{2,3} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_1, \qquad (15.15)$$

аналогичные соотношения справедливы и для других двух дивергенций.

Вернемся к уравнениям $\underset{1}{G}_{4s}$. Они содержат величину $\frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4s,\,t} - \underset{2}{\gamma}_{4t,\,s})_{,\,t}$, являющуюся дивергенцией антисимметричного выражения. Эта дивергенция эквивалентна ротору, компоненты которого нумеруются индексом s. По теореме Стокса интеграл ротора по замкнутой поверхности равен нулю. Другими словами,

$$\frac{1}{2}\oint (\underset{2}{\gamma}_{4s,\,t} - \underset{2}{\gamma}_{4t,\,s})_{,\,t} \cdot \cos(s,\,n)\,dS \equiv 0, \qquad (15.16)$$

здесь $\cos(s, n)$ означает косинус угла между координатой ξ^s и нормалью к элементу поверхности $\mathbf{dS}$. Применим (15.16) к замкнутой поверхности, окружающей p-ю особенность, но выбранную так, чтобы на самой поверхности не было особенностей. На поверхности (но не внутри ее) должны удовлетворяться уравнения поля, поэтому имеем

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \oint_S G_{4s} \cos(s, n)\, dS = \\ &= -\frac{1}{2} \oint_S \underset{1}{\gamma}_{44,\,4s} \cos(s, n)\, dS = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left\{ \oint (\operatorname{grad} \underset{1}{\gamma}_{44} \cdot d\mathbf{S}) \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.17)$$

Это уравнение выражает собой то условие, что параметры $\overset{k}{\mu}$ остаются постоянными, ибо интеграл $\oint (\operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{S})$ представляет собой просто „число силовых линий", исходящих из области S, и поэтому пропорционален $\overset{k}{\mu}$. Уравнение (15.17) соответствует условию

$$\frac{d\overset{k}{\mu}}{d\xi^4} = 0, \quad k = 1 \ldots N. \qquad (15.18)$$

Последнее, что можно сделать в первом приближении, это решить дифференциальные уравнения G_{4s} относительно $\underset{2}{\gamma}_{4s}$,

$$\left.\begin{aligned} &\underset{2}{\gamma}_{4t,\,ts} - \underset{2}{\gamma}_{4s,\,tt} = \psi_{,\,4s}, \\ &\psi = -\sum_k \frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.19)$$

где $\overset{k}{\mu}$ теперь рассматриваются как постоянные. Уравнения (15.6) и (15.7) показывают, что эти уравнения удовлетво-

ряются выражениями:

$$\underset{2}{\gamma}_{4r} = +\sum_{k=1}^{N} \overset{k}{y}{}^{r} \frac{\overset{k}{\mu}}{\underset{r}{k}} \equiv \psi_r \tag{15.20}$$

(точкой обозначено дифференцирование по ξ^4), что доказывается просто подстановкой в (15.19).

Для получения уравнений движения необходимо перейти ко второму приближению.

Второе приближение и уравнения движения. Во втором приближении необходимо использовать следующие контравариантные компоненты метрического тензора:

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{h}^{44} &= -\underset{1}{h}_{44} = -\frac{1}{2}\psi, \\ \underset{1}{h}^{4s} &= \underset{1}{h}_{4s} = \psi_s, \\ \underset{0}{h}^{rs} &= -\underset{2}{h}_{rs} = -\frac{1}{2}\delta_{rs}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{15.21}$$

С их помощью находим выражения для символов Кристоффеля:

$$\left.\begin{aligned} [\underset{2}{44},4] &= \frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,4}, \\ [\underset{2}{44},t] &= -\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,t} + \psi_{t,4}, \\ [\underset{2}{4r},4] &= \frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,r}, \\ [\underset{3}{4r},t] &= \frac{1}{2}(\underset{3}{h}_{4t,r} - \underset{3}{h}_{4r,t} + \underset{3}{h}_{rt,4}), \\ [\underset{3}{rs},t] &= \frac{1}{2}(\underset{3}{h}_{rt,s} + \underset{3}{h}_{st,r} - \underset{3}{h}_{rs,t}), \end{aligned}\right\} \tag{15.22}$$

и

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix}4\\44\end{matrix}\right\}_2 = [\underset{2}{44},4] + \underset{1}{h}^{44}[\underset{1}{44},4] + \underset{1}{h}^{4n}[\underset{1}{44},n] = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\,\underset{4}{h}_{44,4} - \frac{1}{8}\,\psi\psi_{,4} - \frac{1}{4}\,\psi_n\psi_{,n}, \\
&\left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}_1 = -[\underset{2}{44},t] + \underset{0}{h}^{tn}[\underset{1}{44},n] = \\
&= \frac{1}{2}\,\underset{2}{h}_{44,} - \psi_{t,4} + \frac{1}{8}\,\psi\psi_{,t}, \\
&\left\{\begin{matrix}4\\4r\end{matrix}\right\}_2 = [\underset{2}{4r},4] + \underset{1}{h}^{44}[\underset{1}{4r},4] = \frac{1}{2}\,\underset{2}{h}_{44,r} - \frac{1}{8}\,\psi\psi_{,r}, \\
&\left\{\begin{matrix}t\\4r\end{matrix}\right\}_2 = -[\underset{3}{4r},t] + \underset{0}{h}^{tn}[\underset{2}{4r},n] + \underset{1}{h}^{t4}[\underset{1}{4r},4] = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\,(\underset{3}{h}_{4r,t} - \underset{3}{h}_{4t,r} - \underset{3}{h}_{rt,4}) + \\
&+ \frac{1}{4}\psi\,(\psi_{r,t} - \psi_{t,r}) - \frac{1}{8}\,\delta_{rt}\psi\psi_{,4} + \frac{1}{4}\,\psi_t\psi_{,r}, \\
&\left\{\begin{matrix}t\\rs\end{matrix}\right\}_2 = -[\underset{3}{rs},t] + \underset{0}{h}^{tn}[\underset{2}{rs},n] = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\,(\underset{3}{h}_{rs,t} - \underset{3}{h}_{rt,s} - \underset{3}{h}_{st,r}) + \\
&\qquad + \frac{1}{8}\,\psi\,(\delta_{rs}\psi_{,t} - \delta_{rt}\psi_{,s} - \delta_{st}\psi_{,r}).
\end{aligned}
\right\} \qquad (15.23)
$$

В этом приближении компоненты свернутого тензора кривизны представляются довольно громоздкими выражениями. Если уравнения первого приближения удовлетворяются, то во втором приближении $R_{\mu\nu}$ имеет компоненты

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{1}{R}_{44} = \left\{\begin{matrix}\rho\\4\rho\end{matrix}\right\}_{1,4} - \left\{\begin{matrix}4\\44\end{matrix}\right\}_{1,4} - \left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}_{1,t} - \\
&\qquad - \left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}_0 \left\{\begin{matrix}\rho\\t\rho\end{matrix}\right\}_1 + 2\left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}_0 \left\{\begin{matrix}4\\4t\end{matrix}\right\}_1 = \\
&= -\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,tt} - \frac{3}{4}\,\psi_{,44} + \psi_{t,t4} + \frac{1}{8}\,\psi_{,t}\psi_{,t}.
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{2}{R}_{4s} = \underset{2}{\left\{ {\rho \atop s\rho} \right\}}_{,4} - \underset{2}{\left\{ {4 \atop 4s} \right\}}_{,4} - \underset{2}{\left\{ {t \atop 4s} \right\}}_{,t} - \\
&- \underset{1}{\left\{ {4 \atop 4s} \right\}} \underset{1}{\left\{ {\rho \atop 4\rho} \right\}} - \underset{1}{\left\{ {t \atop 4s} \right\}} \underset{1}{\left\{ {\rho \atop t\rho} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {4 \atop 44} \right\}} \underset{1}{\left\{ {4 \atop s4} \right\}} + \\
&+ \underset{0}{\left\{ {t \atop 44} \right\}} \underset{2}{\left\{ {4 \atop st} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {4 \atop 4t} \right\}} \underset{1}{\left\{ {t \atop s4} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {n \atop 4m} \right\}} \underset{1}{\left\{ {m \atop sn} \right\}} = \\
&\quad = \frac{1}{2}(\underset{3}{h}_{4t,st} - \underset{3}{h}_{4s,ti} + \underset{3}{h}_{st,4t} - \underset{3}{h}_{it,s4}) + \\
&\quad + \frac{1}{4}[\psi(\psi_{t,s} - \psi_{s,t})]_{,t} - \frac{1}{4}(\psi\psi_{,s})_{,4} - \\
&\quad - \frac{1}{4}(\psi_t\psi_{,s})_{,t} + \frac{1}{8}\psi_{,4}\psi_{,s} + \frac{1}{4}\psi_{,t}\psi_{s,t}, \\
&\underset{2}{R}_{rs} = \underset{2}{\left\{ {\rho \atop r\rho} \right\}}_{,s} - \underset{2}{\left\{ {4 \atop rs} \right\}}_{,4} - \underset{2}{\left\{ {t \atop rs} \right\}}_{,t} - \\
&\quad - \underset{1}{\left\{ {t \atop rs} \right\}} \underset{1}{\left\{ {\rho \atop t\rho} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {4 \atop r4} \right\}} \underset{1}{\left\{ {4 \atop s4} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {n \atop rm} \right\}} \underset{1}{\left\{ {m \atop sn} \right\}} = \\
&= \frac{1}{2}(\underset{3}{h}_{rt,st} + \underset{3}{h}_{st,rt} - \underset{3}{h}_{rs,ti} + \underset{2}{h}_{44,rs} - \underset{3}{h}_{ti,rs}) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\delta_{rs}\psi_{,44} - \frac{1}{2}(\psi_{r,s4} - \psi_{s,r4}) - \\
&\quad - \frac{1}{8}\psi_{,r}\psi_{,s} - \frac{1}{4}\psi\psi_{,rs} - \frac{1}{8}\delta_{rs}\psi_{,t}\psi_{,t}, \\
&\underset{1}{R} = \underset{3}{h}_{mm,nn} - \underset{2}{h}_{44,tt} - \underset{3}{h}_{mn,mn} - \frac{3}{2}\psi_{,44} + \\
&\quad + 2\psi_{t,t4} + \frac{5}{8}\psi_{,t}\psi_{,t}.
\end{aligned}
\right\} \quad (15.24)
$$

Для получения уравнений движения необходимо иметь выражения для $\underset{2}{G}_{rs}$:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{G}_{rs} = \frac{1}{2}\,[&\underset{3}{h}_{rt,\,st} + \underset{3}{h}_{st,\,rt} - \underset{3}{h}_{rs,\,tt} + \underset{2}{h}_{44,\,rs} - \\
&- \underset{3}{h}_{tt,\,rs} + \delta_{rs}\,(\underset{3}{h}_{mm,\,nn} - \underset{2}{h}_{44,\,tt} - \\
&- \underset{3}{h}_{mn,\,mn})] - \frac{1}{2}\,\delta_{rs}\psi_{,\,44} - \frac{1}{2}\,(\psi_{r,\,s4} - \\
&- \psi_{s,\,r4}) + \delta_{rs}\psi_{t,\,t4} - \frac{1}{8}\,\psi_{,\,r}\psi_{,\,s} - \\
&- \frac{1}{4}\,\psi\psi_{,\,rs} + \frac{3}{16}\,\delta_{rs}\psi_{,\,t}\psi_{,\,t} = \frac{1}{2}\,[\underset{3}{\gamma}_{rt,\,st} + \\
&+ \underset{3}{\gamma}_{st,\,rt} - \underset{3}{\gamma}_{rs,\,tt} - \delta_{rs}\underset{3}{\gamma}_{mn,\,mn}] - \frac{1}{2}\,(\psi_{r,\,s4} - \\
&- \psi_{s,\,r4}) + \delta_{rs}\psi_{t,\,t4} - \frac{1}{2}\,\delta_{rs}\psi_{,\,44} - \\
&- \frac{1}{8}\,\psi_{,\,r}\psi_{,\,s} - \frac{1}{4}\,\psi\psi_{,\,rs} + \frac{3}{16}\,\delta_{rs}\psi_{,\,t}\psi_{,\,t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.25)$$

Некоторые члены этих выражений могут быть представлены как дивергенции антисимметричных величин. Поэтому для квадратной скобки имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{3}{\gamma}_{rt,\,st} + \underset{3}{\gamma}_{st,\,rt} - \underset{3}{\gamma}_{rs,\,tt} - \delta_{rs}\underset{3}{\gamma}_{mn,\,mn} = \\
&= (\underset{3}{\gamma}_{rt,\,s} - \underset{3}{\gamma}_{rs,\,t})_{,\,t} + (\delta_{rt}\underset{3}{\gamma}_{sn,\,n} - \delta_{rs}\underset{3}{\gamma}_{tn,\,n})_{,\,t}
\end{aligned}\right\} \qquad (15.26)$$

и кроме того,

$$-\frac{1}{2}\,\psi_{s,\,r4} + \frac{1}{2}\,\delta_{rs}\psi_{t,\,t4} = \frac{1}{2}\,(\delta_{rs}\psi_{t,\,4} - \delta_{rt}\psi_{s,\,4})_{,\,t}. \qquad (15.27)$$

С этого момента доказательство проводится так же, как и доказательство закона сохранения массы. Интегралы от $\underset{2}{G}_{rs}\cos(s, n)$ по замкнутой поверхности S, на которой

нет особенностей, должны равняться нулю. С другой стороны, интегралы от выражений, эквивалентных ротору, независимо обращаются в нуль. Поэтому должны сами по себе обращаться в нуль и интегралы от остальных членов. Эти оставшиеся члены состоят только из величин, найденных в первом приближении. Если существует второе приближение, то равенство нулю интеграла от оставшихся членов является тем интегральным условием, которому должны удовлетворять величины первого приближения. Следующие три интеграла должны обращаться в нуль:

$$\left.\begin{aligned}\oint_S \Big\{\frac{1}{2}(\delta_{rs}\psi_{t,t4} - \psi_{r,s4}) - \frac{1}{2}\delta_{rs}\psi_{,44} - \frac{1}{8}\psi_{,r}\psi_{,s} - \\ - \frac{1}{4}\psi\psi_{,rs} + \frac{3}{16}\delta_{rs}\psi_{,t}\psi_{,t}\Big\}\cos(s, n)\, dS = 0.\end{aligned}\right\} \quad (15.28)$$

Если внутри поверхности S нет особенностей, условия (15.28) удовлетворяются тождественно, так как в этом случае, пользуясь теоремой Гаусса, поверхностный интеграл можно преобразовать в объемный, подинтегральное выражение которого тождественно равно нулю. Обозначая подинтегральное выражение поверхностного интеграла через K_{rs}, получим

$$\oint_S K_{rs}\cos(s, n)\, dS \equiv \oint_S \underset{2}{G}_{rs}\cos(s, n)\, dS =$$

$$= \int_V \underset{2}{G}_{rs,s}\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3. \quad (15.29)$$

Покажем с помощью тождеств Бьянки, что подинтегральное выражение $\underset{2}{G}_{rs,s}$ равно нулю. Обозначим еще выражения $G^{\rho}_{\mu;\rho}$ через B_μ. Разлагая B_μ в степенные ряды по

c^{-2}, для $\underset{1}{B}_r$ получим

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{B}_r = &- \underset{2}{G}_{rs,s} + \underset{1}{G}_{r4,4} + \underset{0}{h}^{mn} \underset{1}{G}_{rm,n} - \\ &- \left\{ {4 \atop r4} \right\}_1 \underset{0}{G}_{44} + \left\{ {m \atop rn} \right\}_1 \underset{1}{G}_{mn} + \left\{ {s \atop mn} \right\}_1 \underset{1}{G}_{rs} - \left\{ {s \atop 44} \right\}_0 \underset{1}{G}_{rs}. \end{aligned}\right\} \quad (15.30)$$

Так как уже предполагается, что уравнения первого приближения $\underset{0}{G}_{44}$, $\underset{1}{G}_{4r}$, $\underset{1}{G}_{rs}$ удовлетворяются в области V, то находим, что первый член, $-\underset{2}{G}_{rs,s}$, обращается в нуль, даже если уравнения второго и высших приближений не удовлетворяются.

Условия (15.28) существенны, только если внутри поверхности S имеются особые точки. Значение интегралов (15.28) зависит от особенностей, находящихся внутри S, но не зависит от формы и размеров этой поверхности. Выберем S в виде малой сферы радиуса R, центром которой является p-особенность.

Вычислим далее явно три интеграла (15.28). Для выражений $\frac{1}{R}(\xi^s - \overset{p}{y}{}^s)$, являющихся косинусами углов (s, n), введем сокращенные обозначения η_s. Производными от η_s по ξ^r и ξ^4 будут:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{s,r} &= \frac{1}{R}(\delta_{sr} - \eta_s \eta_r), \\ \eta_{s,4} &= \frac{1}{R}(\eta_s \eta_r - \delta_{sr}) \dot{\overset{p}{y}}{}^r. \end{aligned}\right\} \quad (15.31)$$

Вычисление упрощается, если подинтегральные выражения уравнений (15.28) разложить в степенные ряды по R. Поэтому удобно вместо трех координат ξ^s ввести радиус R и направляющие косинусы η_s, удовлетворяющие соотношению

$$\eta_s \eta_s = 1. \quad (15.32)$$

Поскольку значения интегралов не зависят от формы и размеров поверхности S, они не зависят также и от R. Если подинтегральные выражения K_{rs} разложить в степен-

ные ряды по R (степенные ряды, содержащие и положительные и отрицательные степени), то будут отличны от нуля только интегралы от членов, содержащих R^{-2}. Это объясняется тем, что „площадь" поверхности S пропорциональна R^2, и только члены подинтегрального выражения, пропорциональные R^{-2}, могут сделать интегралы, не зависящими от R. Поэтому необходимые вычисления можно сократить, разлагая подинтегральные выражения K_{rs} в ряды и отбрасывая все члены, которые не умножаются на R^{-2}.

Далее, если бы $\overset{p}{\mu}$ обращались в нуль, т. е. если бы p-я особенность не существовала, интегралы (15.28) равнялись бы нулю тождественно. В силу этого, все члены, не зависящие от $\overset{p}{\mu}$, в значение интегралов ничего не вносят, и, следовательно, ими можно пренебречь. Разложим ψ и ψ_s каждую на две части:

$$\left.\begin{aligned} &\psi=\iota+\lambda, \quad \iota=\frac{\overset{p}{\mu}}{R}, \quad \lambda=\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}, \\ &\psi_s=\iota_s+\lambda_s \quad \iota_s=\overset{p}{y}{}^s\frac{\overset{p}{\mu}}{R}, \quad \lambda_s=\sum_{k=1}^{N}{}' \overset{k}{y}{}^s\frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}, \end{aligned}\right\} \quad (15.33)$$

где сумма $\sum'$ распространяется на все значения k, кроме $k=p$.

В K_{rs} входят как линейные относительно ψ и ψ_s члены, так и квадратичные. В линейных членах нужно рассматривать только выражения, зависящие от ι и ι_s. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\iota_{l,4}=-\ddot{\overset{p}{y}}{}^l\eta_{lt}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}+ \quad \text{члены, зависящие от } R^{-3}, \\ &\iota_{r,s4}=-\ddot{\overset{p}{y}}{}^r\eta_{ls}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}+\ldots, \\ &\iota_{,44}=-\ddot{\overset{p}{y}}\,\eta_{lt}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (15.34)$$

Линейные члены, интеграл которых не равен нулю, умноженные на

$$\cos(s, n) = \eta_s,$$

равны

$$\frac{1}{2}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}\ddot{y}^r.$$

После интегрирования по S они дают

$$2\pi\overset{p}{\mu}\ddot{\overset{p}{y}}{}^r \equiv L_r. \tag{15.35}$$

Обратимся теперь к квадратичным членам. ι и ι_s умножаются на R^{-1}, их первые производные по пространственным координатам — на R^{-2}, и их вторые производные — на R^{-3}. Очевидно, что все члены, квадратичные относительно $\overset{p}{\mu}$, умножаются на R^{-4}, и поэтому ничего не вносят в интегралы. Таким образом, необходимо рассматривать только члены, билинейные относительно выражений ι и λ. Кроме выражений ι, нам еще понадобятся $\iota_{,r}$ и $\iota_{,rs}$, которые имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \iota_{,r} &= +\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}\eta_r, \\ \iota_{,rs} &= \frac{\overset{p}{\mu}}{R^3}(\delta_{rs} - 3\eta_r\eta_s). \end{aligned}\right\} \tag{15.36}$$

Эти ι-выражения умножаются на λ и ее производные. Само λ умножается на вторые производные ι, т. е. на выражения, пропорциональные R^{-3}. Поэтому для вычисления интеграла существенны только те члены в степенном разложении λ, которые пропорциональны R^{+1}. По тем же причинам для вычисления интегралов (15.28) будут существенны только те члены первых производных от λ, которых умножаются на R^0; эти члены являются первыми производными от интересующих нас членов в разложении самого λ. Наконец, во вторых производных нас интересовали бы члены, пропорциональные R^{-1}, но они равны нулю, так как λ регулярна внутри S.

Для получения степенных рядов для λ, разложим сперва выражения $\overset{k}{r}$. Запишем $\overset{k}{r}$ в виде

$$\left.\begin{aligned} \overset{k}{r} &= [(\xi^t - \overset{k}{y}{}^t)(\xi^t - \overset{k}{y}{}^t)]^{1/2} = \\ &= ([\overset{p,k}{y}{}^t + R\,\eta_t)(\overset{p,k}{y}{}^t + R\,\eta_t)]^{1/2}, \\ \overset{p,k}{y}{}^t &= \overset{p}{y}{}^t - \overset{k}{y}{}^t. \end{aligned}\right\} \tag{15.37}$$

Обозначим „координатные расстояния“ между p-й и k-й точечными массами $[(\overset{p}{y}{}^t - \overset{k}{y}{}^t)(\overset{p}{y}{}^t - \overset{k}{y}{}^t)]^{1/2}$ через $r_{p,k}$; тогда для $\overset{k}{r}$ получим степенное разложение:

$$\left.\begin{aligned} \overset{k}{r} &= r_{p,k}\left[1 + 2\frac{\overset{p,k}{y}{}^t\eta_t}{(r_{p,k})^2}R + \frac{R^2}{(r_{p,k})^2}\right]^{1/2} = \\ &= r_{p,k}\left[1 + \frac{\overset{p,k}{y}{}^t\eta_t}{(r_{p,k})^2}R + \ldots\right], \end{aligned}\right\} \tag{15.38}$$

а разложение для λ примет вид

$$\lambda = -\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{r_{p,k}}\left(1 - \frac{\overset{p,k}{y}{}^t\eta_t}{(r_{p,k})^2}R + \ldots\right). \tag{15.39}$$

Только второй член этого разложения

$$\lambda = \ldots + \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\overset{p,k}{y}{}^t\eta_t R + \ldots, \tag{15.40}$$

существен для интегралов (15.28). Его производные равны

$$\lambda_{,r} = \ldots \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\overset{p,k}{y}{}^r + \ldots. \tag{15.41}$$

Нелинейными членами в интегралах (15.28) тогда будут

$$-\frac{1}{8}(\iota_{,r}\lambda_{,s} + \iota_{,s}\lambda_{,r}) - \frac{1}{4}\lambda\iota_{,rs} + \frac{3}{8}\delta_{rs}\iota_{,t}\lambda_{,t} \equiv N_{rs}. \tag{15.42}$$

Подставляя выражения (15.36) и (15.41) в уравнение (15.42), получим для N_{rs}:

$$N_{rs}=\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{p}{\mu}\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\frac{1}{R^2}\left[-\frac{1}{8}\left(\eta_{lr}\overset{p,k}{y^s}+\eta_{ls}\overset{p,k}{y^r}\right)+\right.$$

$$\left.+\eta_{lt}\overset{p,k}{y^t}\left(\frac{1}{8}\delta_{rs}+\frac{3}{4}\eta_{lr}\eta_{ls}\right)\right], \qquad (15.43)$$

а для произведения N_{rs} на $\cos(s, n)$:

$$N_{rs}\eta_{ls}=\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{p}{\mu}\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\frac{1}{R^2}\left[-\frac{1}{8}\overset{p,k}{y^r}+\frac{3}{4}\eta_{lt}\cdot\overset{p,k}{y}\,\eta_{lr}\right]. \qquad (15.44)$$

Это выражение нужно проинтегрировать по поверхности S. Для этого рассмотрим интеграл

$$\oint_S \eta_{lt}\overset{p,k}{y^t}\eta_{lr}dS.$$

Нужно отдельно вычислить два интеграла:

$$\oint_S \overset{p,k}{y^r}(\eta_{lr})^2\,dS \text{ (не суммировать по } r!) \qquad (15.45)$$

и

$$\oint_S \eta_{lt}\overset{p,k}{y^t}\eta_{lr}dS \quad t\neq r. \qquad (15.46)$$

Сферу S можно разделить на две полусферы, на одной из которых η_{lr} положительно, а на другой — отрицательно. η_{lt} в свою очередь будет положительно на одной половине каждой полусферы и отрицательно — на другой. Интеграл (15.46) обращается в нуль, так как интегралы по соответствующим четвертям сфер взаимно уничтожаются. Для вычисления интеграла (15.45) введем полярные координаты с полюсами в двух точках $\eta_{lr}=1$. Тогда получим:

$$\oint_S \overset{p,k}{y^r}(\eta_{lr})^2\,dS=2\pi\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\overset{p,k}{y^r}\cdot\sin^2\theta\cdot R^2\cos\theta d\theta=\frac{4}{3}\pi R^2\overset{p,k}{y^r}.$$

Наконец, находим, что интеграл от выражения (15.44) равен

$$\oint_S N_{rs}\,\eta_s\,dS = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\overset{p}{\mu}\,\overset{k}{\mu}\,\overset{p,k}{y^r}}{(r_{p,k})^3} \equiv Q_r\,. \qquad (15.47)$$

Наше условие заключается в том, что сумма из L_r выражения (15.35) и Q_r должна равняться нулю:

$$4\overset{p}{\mu}\ddot{\overset{p}{y}}{}^r + \sum_{k=1}^{N}{}'\frac{\overset{p}{\mu}\,\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\overset{p,k}{y^r} = 0\,. \qquad (15.48)$$

Деля это уравнение на $\overset{p}{\mu}$ и подставляя вместо $\overset{k}{\mu}$ его значение из уравнения (15.14), получим классические уравнения движения

$$\ddot{\overset{p}{y}}{}^r = -\sum_{k=1}^{N}{}'\frac{\varkappa\,\overset{k}{M}}{(r_{p,k})^3}\overset{p,k}{y^r}\,. \qquad (15.49)$$

Метод Эйнштейна, Инфельда и Гофмана применим также и при наличии одновременно гравитационного и электромагнитного полей. И в этом случае во втором приближении уравнения поля имеют решения только тогда, когда первое приближение удовлетворяет некоторым интегральным условиям. Эти условия эквивалентны уравнению (15.48). с добавочным членом, соответствующим кулонову полю.

Заключение. Очень важно выяснить, почему в одной теории поля (теории гравитации) уравнения движения получаются из уравнений поля, в то время как в другой теории (теории Максвелла) этого не происходит. Основная причина состоит в том, что уравнения гравитационного поля удовлетворяют четырем тождествам, тогда как уравнения Максвелла только одному. Значение этих тождеств для уравнений движения было показано как Вейлем при исследовании точных решений с осевой симметрией, так и Эйнштейном, Инфельдом и Гофманом в их приближенном методе.

Благодаря этим тождествам уравнения поля общей теории относительности являются одновременно как бы „переопределенными“ и „недоопределенными“. Уравнения поля линейны относительно вторых производных. Однако разрешить их относительно второй производной такой координаты, как ξ^4, невозможно, так как четыре из десяти уравнений поля, G_{4s} и G_{44}, содержат только первые производные по ξ^4. Поэтому невозможно произвольно задать все переменные поля и их первые производные по ξ^4 на некоторой гиперповерхности $\xi^4 = \text{const}$; на этой гиперповерхности эти величины должны удовлетворять четырем условиям. В этом смысле уравнения переопределены.

Но в то же время, если задать переменные и их первые производные по ξ^4 на гиперповерхности $\xi^4 = \text{const}$ в согласии с четырьмя уравнениями G_{4s} и G_{44}, то останутся только шесть уравнений, определяющих поведение десяти переменных в направлении ξ^4; вторые производные по ξ^4 от четырех переменных остаются произвольными. В этом смысле уравнения недоопределены. Однако можно показать, что благодаря четырем свернутым тождествам Бьянки четыре уравнения G_{4s} и G_{44} продолжают удовлетворяться и вне выбранной гиперповерхности в том случае, если они удовлетворяются на этой гиперповерхности и если шесть уравнений G_{rs} удовлетворяются во всем пространстве.

Если же на выбранной гиперповерхности $\xi^4 = \text{const}$ имеются изолированные области, в которых уравнения не удовлетворяются, то эти области можно окружить (пространственными) поверхностями, так что тождества заменятся условиями обращения в нуль четырех интегралов по этим поверхностям. Одно тождество, которому удовлетворяют уравнения Максвелла, дает для изолированных областей только одно условие — условие сохранения заряда (см. главу XII). Однако в этом случае количество тождеств недостаточно для получения уравнений движения.

Уравнения гравитационного поля отличаются от уравнений электромагнитного поля Максвелла и в другом отношении: они нелинейны. В силу этого линейная комбинация нескольких решений не является решением уравнений. Если бы

решения получались как линейные комбинации, это означало бы отсутствие взаимодействия точечных масс друг с другом. Приближенный метод Эйнштейна, Инфельда и Гофмана показывает, что даже классическое взаимодействие точечных масс обусловлено нелинейными членами в уравнениях поля.

Отсюда явствует, что из теории поля законы движения вытекают только в том случае, когда уравнения поля нелинейны и удовлетворяют, по крайней мере, четырем тождествам. В общей теории относительности нелинейность уравнений поля обусловлена их ковариантностью относительно общих преобразований координат. Взаимодействие точечных масс является, таким образом, еще одним аргументом в пользу принципа общей ковариантности.

Прежде чем закончить обсуждение общей теории относительности, отметим еще некоторые возникающие здесь проблемы. Общая теория относительности дает нам логически стройную теорию гравитации. Однако электромагнитное поле остается логически независимым от гравитационного; общей теории относительности не удалось объединить эти два типа полей в единое целое. Был предпринят ряд попыток создать „единую" теорию поля, в которой и электромагнитное и гравитационное поля являлись бы составными частями геометрической структуры пространства. Некоторые из этих попыток будут рассмотрены в третьей части книги.

Далее, общая теория относительности не дает нам удовлетворительной теории строения материи. Существующие в природе элементарные частицы обладают определенными характеристическими массами, зарядами и т. д. Однако теория относительности, в которой частицы представляют собой особенности поля, не может объяснить этого обстоятельства.

Квантовые явления целиком находятся вне сферы рассмотрения общей теории относительности. Волновая механика является нерелятивистской, так как она не может обойтись без представления о действии на расстоянии. Первоначальная теория электрона Дирака описывает лорентц-ковариантным образом действие электромагнитного поля на

один электрон; однако, поскольку само поле неквантовано, эта теория не определяет надлежащим образом поля самого электрона, поэтому в ней не могут рассматриваться проблемы, касающиеся взаимодействия нескольких заряженных частиц.

Попытки получения релятивистской квантовой теории квантованием самого электромагнитного поля оказались весьма успешными. Однако все „квантовые теории поля" неудовлетворительны с математической точки зрения в том отношении, что их решения всегда расходятся. Таким образом, в настоящее время не существует удовлетворительной квантовой теории, лорентц-ковариантной или ковариантной относительно общих преобразований координат.

И теория относительности и квантовая теория являются огромными достижениями современной физики по сравнению с физикой девятнадцатого столетия. Однако эти достижения поставили нас лицом к лицу с новыми, в настоящее время еще не решенными проблемами. Невозможно предсказать, как будут преодолены возникшие трудности, несомненно, однако, что будущие теории включат то лучшее, что имеется в квантовой теории и в теории относительности.

Задача

Получить уравнения движения электрически заряженных точечных масс (закон Кулона).