

## ГРАДИЕНТНО-ИНВАРИАНТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЕЙЛЯ

\*

В общей теории относительности гравитационное поле образует основу геометрической структуры метрического пространства, в то время как электромагнитное поле не имеет никакого отношения к геометрии пространства. Было сделано много попыток построить новую теорию гравитации и электромагнетизма на основе измененной геометрии, в которой наряду с метрическим тензором нужно было бы ввести и другие геометрические величины. Одной из наиболее удачных геометрий такого типа несомненно является градиентно-инвариантная геометрия Г. Вейля.<sup>1)</sup> Несмотря на красоту геометрических концепций, удовлетворительной теории с ее помощью создать, однако, не удалось.

В этой главе мы рассмотрим геометрию Вейля и соответствующие ей теории поля. Формализм, которым мы будем пользоваться, отличается от вейлевского, но он ему эквивалентен в отношении образования ковариантных величин. Все ковариантные построения вейлевского формализма соответствуют рассматриваемым здесь ковариантным построениям, и наоборот. Однако в нашем формализме нет одной неинвариантной особенности вейлевского формализма — градиентного параметра и соответствующих ему градиентных преобразований.

**Геометрия.** В метрическом пространстве пространственно-временной интервал между двумя бесконечно близкими мировыми точками  $d\tau$  инвариантен. Каждой мировой точке соответствует инвариантный „конус“, „световой конус“, в направлении которого  $d\tau$  равно нулю. Идея Вейля заключается в таком видоизменении геометрии, чтобы при

1) H. Weyl, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., стр. 465 (1918); Ann. d. Physik, 59, 101 (1919).

этом сохранялась бы инвариантность светового конуса, но в то же время  $d\tau$  терял бы свой инвариантный характер. Вопрос о том, соответствует ли это опыту, остается открытым. Трудно сомневаться в том, что возможные направления световых лучей являются инвариантными свойствами физического пространства. Но существуют также „атомные часы“, которые являются универсальным стандартом для единиц собственного времени. Конечно, возможно, что частота стандартных спектральных линий в действительности несколько меняется, так что, строго говоря, не существует точных эталонов для измерений собственного времени. Тем не менее, мы попытаемся построить геометрию, удовлетворяющую основным положениям Вейля.

Нулевые направления полностью определяются отношениями различных компонент метрического тензора. Поэтому Вейль ввел, наряду с преобразованиями координат, „градиентные преобразования“, при которых компоненты метрического тензора умножаются на произвольную функцию координат. При этом линейный элемент  $d\tau$  умножается на тот же множитель и, следовательно, не является „градиентным инвариантом“. Возможно построить геометрию, инвариантную и относительно градиентных преобразований и относительно преобразований координат.

Вместо градиентных преобразований введем „условия нормировки“ произвольного множителя линейного элемента и потребуем, чтобы детерминант  $g_{\mu\nu}$  равнялся  $-1$ :

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \quad (16.1)$$

Если бы характер преобразования  $g_{\mu\nu}$  был сохранен, это условие нормировки не было бы инвариантным. Поэтому предположим в этой главе, что  $g_{\mu\nu}$  преобразуются как компоненты тензорной плотности с весом  $-1/2$ :

$$g_{\mu\nu}^* = \left| \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^3} \right|^{1/2} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{*\mu}} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^{*\nu}} g_{ij}. \quad (16.2)$$

Линейный элемент  $d\tau$ ,

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu,$$

таким образом, уже не является инвариантным. Детерминант может быть представлен в виде произведения метрических тензоров и тензорных плотностей Леви-Чивита:

$$|g_{\mu\nu}| \equiv \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \cdot \delta^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} \cdot g_{\alpha_1 \beta_1} \cdot g_{\alpha_2 \beta_2} \cdot g_{\alpha_3 \beta_3} \cdot g_{\alpha_4 \beta_4}, \quad (16.3)$$

Каждая тензорная плотность Леви-Чивита имеет вес  $+1$ , поэтому детерминант является скаляром, а уравнение (16.1) представляет инвариантное условие. В силу условия нормировки (16.1) метрическая тензорная плотность, имеющая вес  $\frac{1}{2}$ , имеет только девять алгебраически независимых компонент.

**Производные в градиентно-инвариантной геометрии.** Чтобы получить уравнения поля в геометрии Вейля, надо опять ввести аффинную связность и кривизну. Так как в этой геометрии тензорные плотности с весом играют основную роль, то нужно на них распространить понятие ковариантного дифференцирования. Для этого введем совокупность переменных с одним индексом  $\varphi_\mu$ , которые входят в определение ковариантного дифференцирования:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{...}_{x...,\sigma} &= \mathcal{J}^{...}_{x...,\sigma} + \\ &+ \Gamma_{\rho\sigma} \mathcal{J}^{...}_{x\rho...} - \Gamma_{x\sigma}^{\rho} \mathcal{J}^{...}_{\rho...} - n \mathcal{J}^{...}_{x...,\sigma} \varphi_\sigma. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Здесь  $n$  — вес тензорной плотности  $\mathcal{J}^{...}_{x...,\sigma}$ . Чтобы получить закон преобразования  $\varphi_\mu$ , достаточно рассмотреть ковариантные производные скалярной плотности  $D$  веса  $n$ . Эти производные образуют векторную плотность веса  $n$ .

$$D^*_{;\sigma^*} = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right|^n \frac{\partial \xi^\iota}{\partial \xi^{*\sigma}} D_{;\iota}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \left( \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right|^n D \right)_{;\iota} \frac{\partial \xi^\iota}{\partial \xi^{*\sigma}} - n \varphi^*_\sigma \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right|^n D = \\ = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right|^n (D_{;\iota} - n \varphi_\iota D) \frac{\partial \xi^\iota}{\partial \xi^{*\sigma}}; \end{aligned}$$

и поэтому

$$n \left[ \left( \log \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right| \right)_{;\iota} \frac{\partial \xi^\iota}{\partial \xi^{*\sigma}} - n \varphi^*_\sigma \right] D = -n \varphi_\iota \frac{\partial \xi^\iota}{\partial \xi^{*\sigma}} D. \quad (16.5)$$

Логарифмическая производная детерминанта может быть представлена просто, как

$$\left( \log \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^*\beta} \right| \right)_\gamma = \frac{\partial \xi^{*\beta}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^{*\alpha}}{\partial \xi^*_\gamma} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \xi^*\beta \partial \xi^{*\alpha}} = - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^*\beta} \frac{\partial^2 \xi^{*\beta}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^*_\gamma}. \quad (16.6)$$

Отсюда получаем, наконец, закон преобразования:

$$\varphi_\sigma^* = \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial \xi^{*\sigma}} \varphi_\gamma + \frac{\partial \xi^{*\beta}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta} \partial \xi^{*\sigma}} = \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial \xi^{*\sigma}} \left( \varphi_\gamma - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \frac{\partial^2 \xi^{*\beta}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\gamma} \right) \quad (16.7)$$

В римановой геометрии из условия обращения в нуль ковариантной производной тензора Кронекера  $\delta_i^j$  следует

равенство  $\Gamma^I$  и  $\Gamma^{\text{II}}$  (см. главу V). Определив понятие ковариантного дифференцирования для тензоров с весом, естественно постулировать обращение в нуль ковариантных производных тензорной плотности Леви-Чивита. Это условие связывает величины  $\varphi_\mu$  с коэффициентами аффинной связности:

$$\begin{aligned} & \delta^{p_1 p_2 p_3 p_4} \Gamma_{\rho \sigma}^{i_1} + \delta^{i_1 p_2 p_3 p_4} \Gamma_{\rho \sigma}^{i_2} + \delta^{i_1 i_2 p_3 p_4} \Gamma_{\rho \sigma}^{i_3} + \\ & + \delta^{i_1 i_2 i_3 p_4} \Gamma_{\rho \sigma}^{i_4} - \delta^{i_1 i_2 i_3 i_4} \varphi_\sigma = 0. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Левая часть антисимметрична относительно четырех индексов  $i_1, \dots, i_4$ , что может быть проверено непосредственно. Из уравнений (16.8) только те не являются тождествами, в которых все эти четыре индекса имеют различные значения. В этих уравнениях суммирование по  $\rho$  в первом члене сводится к подстановке  $\rho = i_1$ , во втором — к  $\rho = i_2$ , и т. д. Следовательно, первые четыре члена (16.8) равны

$$\delta^{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_{\rho \sigma}^{\rho}$$

и условия (16.8) сводятся к уравнениям

$$\varphi_\sigma = \Gamma_{\rho \sigma}^{\rho}. \quad (16.9)$$

В геометрии Вейля метрическая тензорная плотность с весом  $\frac{1}{2}$  играет ту же роль, что метрический тензор в римановой геометрии. Поэтому предположим, что его ковариантные производные равны нулю. Если, как и прежде,

еще предположить, что коэффициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах, получим уравнения:

$$g_{\mu\nu;\rho} \equiv g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{\rho} = 0. \quad (16.10)$$

Эти уравнения можно решить, если ввести „контравариантную метрическую тензорную плотность“ с весом  $+ \frac{1}{2}$ ,  $g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\rho}g^{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (16.11)$$

Решение уравнения (16.10) тогда запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\nu\lambda,\sigma} - g_{\lambda\sigma,\nu}) + \\ &+ \frac{1}{4}g^{\lambda\sigma}(g_{\nu\sigma}\varphi_{\lambda} + g_{\nu\lambda}\varphi_{\sigma} - g_{\lambda\sigma}\varphi_{\nu}) \equiv (\lambda). \end{aligned} \quad (16.12)$$

Для свернутой аффинной связности  $(\lambda)$  снова получим уравнение (16.9). Псевдовектор  $\varphi_{\nu}$  и метрическая тензорная плотность с весом  $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$  независимы друг от друга. Оба они необходимы для образования коэффициентов аффинной связности.

Тензор кривизны  $R_{\nu\lambda\mu}^{\nu}$  антисимметричен в  $\nu$  и  $\lambda$ , обладает циклической симметрией, выражаемой формулой (11.29) и удовлетворяет тождествам Бьянки (11.35), так как эти тождества справедливы для любого тензора кривизны, образованного при помощи симметричных  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ . Однако он не обладает другими свойствами симметрии тензора кривизны римановой геометрии. Свернутый тензор  $R_{\nu\lambda\mu}^{\nu}$  также не является симметричным относительно индексов  $\mu$  и  $\lambda$ . Поэтому при образовании свернутых тождеств Бьянки следует соблюдать некоторую осторожность.

Свернем сначала тождества

$$R_{\nu\lambda\mu,\lambda}^{\nu} + R_{\nu\lambda\mu,\lambda}^{\nu} + R_{\lambda\mu\nu,\lambda}^{\nu} \equiv 0 \quad (16.13)$$

по индексам  $\nu$  и  $\mu$ . Тогда получим тождества:

$$\begin{aligned} R_{\rho\mu\nu,\lambda}^{\rho} + R_{\nu\lambda\mu,\rho}^{\rho} + R_{\lambda\mu\nu,\rho}^{\rho} &= R_{\rho\mu\nu,\lambda}^{\rho} + R_{\nu\lambda\mu,\rho}^{\rho} - \\ &- R_{\rho\lambda\mu,\nu}^{\rho} \equiv 0 \end{aligned} \quad (16.14)$$

Поднимая далее индекс  $\sigma$  и свертывая по  $x$  и  $\sigma$ , получим

$$R_{\rho\sigma..;\lambda} + R_{\sigma\lambda..;\rho} - R_{\rho\lambda..;\sigma} \equiv 0, \quad (16.15)$$

где величины  $R$  являются плотностями.

В римановой геометрии тензор кривизны антисимметричен в последних двух индексах, благодаря чему, как было показано, второй и третий члены в (16.15) становятся равными. В геометрии Вейля эти соображения неприменимы. В этой геометрии аналогичной величиной, симметричной в последних двух индексах, является ковариантная тензорная плотность кривизны  $R_{\nu\lambda\mu}$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} (\nu x, \lambda) &= g_{\lambda\nu} (\overset{\circ}{\nu x}) = \frac{1}{2} (g_{\nu\lambda,x} + g_{x\lambda,\nu} - g_{\nu x,\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{4} (g_{\nu\lambda}\varphi_x + g_{x\lambda}\varphi_\nu - g_{\nu x}\varphi_\lambda), \end{aligned} \quad (16.16)$$

где  $g_{\nu x, \lambda}$  — производные метрического тензора. Тогда

$$g_{\nu x, \lambda} = (\nu x, \iota) + (\iota \lambda, x) - \frac{1}{2} g_{\nu x}\varphi_\lambda. \quad (16.17)$$

С помощью  $(\nu x, \lambda)$  ковариантная тензорная плотность кривизны может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} R_{\nu x \lambda \mu} &= (\lambda \iota, \mu)_{,x} + \frac{1}{2} (\lambda \iota, \mu) \varphi_x - (\lambda x, \mu)_{,\iota} - \\ &- \frac{1}{2} (\lambda x, \mu) \varphi_\iota + g^{\rho\sigma} [(\lambda x, \rho) (\mu \iota, \sigma) - (\lambda \iota, \rho) (\mu x, \sigma)] = \\ &= \bar{R}_{\nu x \lambda \mu} + \frac{1}{4} [g_{\nu\mu}\varphi_{\lambda,x} - g_{x\mu}\varphi_{\lambda,\nu} + g_{\lambda\mu}(\varphi_{\nu,x} - \varphi_{x,\nu}) + \\ &+ g_{x\lambda}\varphi_{\mu,\nu} - g_{\nu\lambda}\varphi_{\mu,x}]. \end{aligned} \right\} \quad (16.18)$$

В  $\bar{R}_{\nu x \lambda \mu}$  справа включены все члены, обладающие всеми теми же алгебраическими свойствами симметрии, что и римановский тензор кривизны; остальные члены этими свойствами не обладают. Последние обладают только свойствами симметрии (11.28) и (11.29). Если образовать выражение  $R_{\nu x \lambda \mu} + R_{\nu x \mu \lambda}$ , равное нулю в римановой геометрии, получим

$$R_{\nu x \lambda \mu} = -R_{\nu x \mu \lambda} + 2g_{\lambda\mu}(\varphi_{\nu,x} - \varphi_{x,\nu}). \quad (16.19)$$

Хотя  $\varphi_i$  и не является вектором, его антисимметричные производные

$$\varphi_{ix} = \varphi_{i,x} - \varphi_{x,i} \quad (16.20)$$

образуют тензор, что может быть проверено с помощью (16.7).

Видоизменяя второй член (16.15) с помощью (16.19), получим

$$R_{\rho\sigma..;\lambda}^{\alpha\rho} - 2R_{\rho\lambda..;\sigma}^{\alpha\rho} + 2g^{\rho\sigma}\varphi_{\sigma\lambda;\rho} \equiv 0. \quad (16.21)$$

Это тождество можно преобразовать так, чтобы в него вошла симметрическая часть выражения  $R_{\rho\lambda..}^{\alpha\rho}$ ,

$$R_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}(R_{\rho\lambda..}^{\rho\sigma} + R_{\rho\lambda..}^{\sigma\rho}). \quad (16.22)$$

Из (16.18) находим, что  $R_{\lambda\sigma}$  и  $R_{\rho\lambda..}^{\rho\sigma}$  связаны следующим образом:

$$R_{\rho\lambda..}^{\rho\sigma} = R_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}\varphi_{\lambda\sigma}. \quad (16.23)$$

Подставляя это выражение в (16.21) получим свернутые тождества Бьянки в виде

$$(R^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}R);_\sigma + \frac{1}{2}\varphi^{\lambda\sigma};_\sigma = 0. \quad (16.24)$$

Заметим, что  $\varphi^{\lambda\sigma}$  является тензорной плотностью с весом 1, и, следовательно,  $\varphi^{\lambda\sigma};_\sigma$ , представляет собой обычную дивергенцию от  $\varphi^{\lambda\sigma}$ , т. е.

$$\varphi^{\lambda\sigma};_\sigma \equiv \varphi^{\lambda\sigma},_\sigma. \quad (16.25)$$

**Физическая интерпретация геометрии Вейля.** В геометрии Вейля геометрическая структура пространства характеризуется симметрической тензорной плотностью с весом  $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$  и „псевдовектором“  $\varphi_\mu$ . Казалось бы естественным предположить, что  $g_{\mu\nu}$  представляет гравитационное поле, а  $\varphi_\mu$  являются компонентами мирового вектора потенциала. В первоначальном формализме Вейля величины  $\varphi_\mu$  преобразовывались как вектор при преобразовании координат, но изменились на градиент при градиентном преобразовании. Это

и является исторической причиной, почему прибавление градиента к электромагнитному мировому вектору потенциала носит название градиентного преобразования.

Составим теперь уравнения поля для  $g_{\mu\nu}$  и  $\varphi$ .

**Вариационный принцип Вейля.** Вейль стремился получить уравнения поля, как уравнения Лагранжа-Эйлера вариационного принципа. Покажем следующее: если вариационный принцип инвариантен относительно преобразования координат, то эти уравнения всегда удовлетворяют необходимому количеству тождеств.

Рассмотрим вариационный принцип в виде:

$$\delta I \equiv \delta \int_V \mathfrak{R}(y_A, y_{A,p}, \dots) d\xi = 0, \quad (16.26)$$

где индексы  $A, B, \dots$  служат для нумерации переменных поля  $y$ . Если варьировать  $y_A$  так, чтобы вариации и их производные вплоть до нужного порядка исчезали на границе области  $V$ , то вариация интеграла (16.26) примет вид

$$\delta I = \int_V \sum_A \mathfrak{R}^A \delta y_A d\xi, \quad (16.27)$$

и уравнения

$$\mathfrak{R}^A = 0 \quad (16.28)$$

будут уравнениями Эйлера-Лагранжа вариационного принципа (16.26). Будем изменять переменные  $y_A$  на величины, соответствующие бесконечно малым преобразованиям координат

$$\xi^{*\alpha} = \xi^\alpha + \delta\xi^\alpha (\xi^\rho). \quad (16.29)$$

Если  $\delta\xi^\alpha$  и их производные исчезают на границе  $V$ , то значение  $I$  не изменится при вариации, независимо от того, удовлетворяются уравнения (16.28) или нет.

При преобразовании координат (16.29) функции  $y_A$  претерпевают бесконечно малые изменения  $\delta y_A$ , которые зависят от  $\delta\xi^\alpha$  и от специального вида закона преобразования  $y_A$ . Рассмотрим случай, когда некоторые из  $y_A$  являются компонентами контравариантного вектора  $Y^\rho$ . При переходе

от координат  $\xi^a$  к координатам  $\xi^{*a}$  преобразованные компоненты вектора станут новыми функциями от  $\xi^a$ ; кроме того, аргументы этих функций  $\xi^a$  должны быть заменены на  $\xi^{*a}$ . Если выразить преобразованные компоненты векторного поля  $\bar{Y}^p(\xi^a)$ , как функции первоначальных координат, получим

$$\bar{Y}^p(\xi^a) = Y^p(\xi^a) + (\delta \xi^p)_{,\sigma} Y^\sigma(\xi^a). \quad (16.30)$$

В каждой мировой точке величины  $\bar{Y}^p(\xi^a)$  равны  $Y^{*p}(\xi^{*a})$ , т. е.

$$\bar{Y}^p(\xi^a) = Y^{*p}(\xi^{*a}), \quad (16.31)$$

где  $\xi^a$  и  $\xi^{*a}$  — соответственно первоначальные и новые координаты в одной и той же мировой точке. Чтобы найти разность значений функций  $\bar{Y}^p$  и  $Y^{*p}$  для одинаковых значений соответствующих аргументов, нужно сравнить  $\bar{Y}^p$  в мировой точке с координатами  $\xi^a = \overset{0}{\xi^a}$  с  $Y^{*p}$  в мировой точке с координатами  $\xi^{*a} = \overset{0}{\xi^a}$ . Тогда получим

$$Y^{*p}(\xi^a) = \bar{Y}^p(\xi^a - \delta \xi^a) = \bar{Y}^p(\xi^a) - Y^p_{,\sigma} \delta \xi^\sigma; \quad (16.32)$$

и поэтому бесконечно малым изменением функции  $Y^p$  будет

$$\delta Y^p = (\delta \xi^p)_{,\sigma} Y^\sigma - Y^p_{,\sigma} \delta \xi^\sigma. \quad (16.33)$$

Вообще говоря, компоненты тензоров и тензорных плотностей преобразуются согласно законам типа

$$\delta y_A = -y_{A,\sigma} \delta \xi^\sigma + \sum_B F_{A\sigma}^B y_B (\delta \xi^\sigma)_{,\rho}, \quad (16.34)$$

где постоянные  $F_{A\sigma}^B$  зависят от особенностей законов преобразования. В законе преобразования  $\varphi_\mu$  имеется один член, не относящийся к типу (16.34). Чтобы его учесть, предположим, что рассматриваемые переменные поля преобразуются согласно закону

$$\delta y_A = -y_{A,\sigma} \delta \xi^\sigma + \sum_B F_{A\sigma}^B y_B (\delta \xi^\sigma)_{,\rho} + G_{A\sigma}^{\rho\tau} (\delta \xi^\sigma)_{,\rho\tau}, \quad (16.35)$$

где  $G_{A\sigma}^{\rho\tau}$  — добавочные постоянные.

Чтобы найти условие инвариантности / относительно общих преобразований координат, заменим  $\delta y_A$  в (16.27) его выражением (16.35). Тогда  $\delta I$  должно обращаться в нуль при произвольных  $\delta \xi^\alpha$ , если только  $\delta \xi^\alpha$  и его первые и вторые производные исчезают на границе области  $V$ . Имеем

$$\delta I = \left\{ \sum_A \Re^A \left\{ -y_{A,\alpha} \delta \xi^\alpha + \sum_B F_{A\beta}^{B\rho} y_B (\delta \xi^\alpha),_\rho + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{A\alpha}^{B\tau} (\delta \xi^\alpha),_{\rho\tau} \right\} d\xi \equiv 0. \right\} \quad (16.36)$$

Производя ряд интегрирований по частям, получим отсюда

$$\left\{ \sum_A \left\{ G_{A\alpha}^{B\tau} \Re^A,_{\rho\tau} - \sum_B F_{A\beta}^{B\rho} (y_B \Re^A),_\rho - y_{A,\alpha} \Re^A \right\} \delta \xi^\alpha d\xi \right\} \equiv 0,$$

и если  $\delta \xi^\alpha$  произвольны внутри  $V$ , то уравнения Эйлера-Лагранжа должны удовлетворять четырем дифференциальным тождествам

$$\sum_A \left\{ G_{A\alpha}^{B\tau} \Re^A,_{\rho\tau} - \sum_B F_{A\beta}^{B\rho} (y_B \Re^A),_\rho - y_{A,\alpha} \Re^A \right\} \equiv 0. \quad (16.37)$$

Рассмотрим теперь вариационный принцип в градиентно-инвариантной теории Вейля. Подинтегральное выражение инвариантного интеграла должно быть скалярной плотностью с весом  $+1$ . Скалярная плотность кривизны

$$R = g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\lambda} \quad (16.38)$$

имеет вес  $+1/2$ . Поэтому лангранжиан вариационного принципа должен быть квадратичной функцией кривизны. Существует несколько скалярных плотностей с весом  $+1$ , которые могут быть образованы из компонент тензора кривизны, именно:

$$R^2; R_{\alpha\lambda} R^{\alpha\lambda}; R_{\alpha\lambda\mu\nu} R^{\alpha\lambda\mu\nu}; \varphi_{\alpha\lambda} \varphi^{\alpha\lambda}. \quad (16.39)$$

Первые три из них являются дифференциальными величинами четвертого порядка относительно  $g_{\mu\nu}$ . Наиболее общий лангранжиан такого порядка должен быть линейной комбинацией четырех выражений (16.39). Вариации десяти

$g_{\mu\nu}$  независимы друг от друга, но связаны добавочным условием неизменности нормировки детерминанта  $g$ :

$$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (16.40)$$

Это дополнительное условие легко учесть, применяя метод неопределенных множителей Лагранжа. Появляющийся, таким образом, в уравнениях добавочный параметр можно, однако, исключить, тогда в конечном счете получим тридцать дифференциальных уравнений для тридцати переменных  $g_{\mu\nu}$ ,  $\varphi_\mu$  ( $g_{\mu\nu}$  удовлетворяет условию (16.1)). Эти тридцать уравнений удовлетворяют четырем дифференциальным тождествам (16.37).

Существуют два основных выражения относительно уравнений этого типа. Во-первых, они являются дифференциальными уравнениями четвертого порядка относительно  $g_{\mu\nu}$ . Имеются все основания полагать, что уравнения такого высокого порядка имеют гораздо больше решений, чем уравнения поля второго порядка, поэтому очень трудно объяснить, почему решения этих гипотетических уравнений четвертого порядка так хорошо аппроксимируются в природе решениями уравнений второго порядка. Во-вторых, лагранжиан вариационного принципа не является однозначно определенным, так как для него годится любая линейная комбинация выражений (16.39). Таким образом, не достигается желательной унификации поля, так как остается еще чисто „электромагнитная“ скалярная плотность [последнее выражение (16.39)], которая может входить в лагранжиан с произвольным коэффициентом.

**Уравнения  $G_{\mu\nu} = 0$ .** Эйнштейн и автор этой книги сделали попытку найти уравнения поля второго порядка, аналогичные по структуре уравнениям общей теории относительности<sup>1)</sup>. В частности, они исследовали дифференциальные уравнения

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (16.41)$$

---

<sup>1)</sup> Эта работа не опубликована.

которые представляют собой десять уравнений для тринадцати переменных; они не удовлетворяют дифференциальным тождествам и совершенно независимы друг от друга. В соответствии с уравнениями (16.24), уравнения Максвелла

$$\varphi^{\mu\sigma}_{,\sigma} = 0 \quad (16.42)$$

являются следствием этих уравнений поля. Оказалось, что эти уравнения имеют сферически симметричные статические решения с двумя произвольными параметрами, которые можно интерпретировать соответственно, как массу и заряд. Если  $\varphi_\mu$  равно нулю, уравнения (16.41) для  $g_{\mu\nu}$  формально идентичны с уравнениями поля общей теории относительности; решение с зарядом, равным нулю, оказывается решением Шварцшильда, детерминант которого равен —1. Однако, если „электрический заряд“ не равен нулю, то граничные условия на бесконечности не могут быть удовлетворены, и отклонение метрического тензора от  $\epsilon_{\mu\nu}$  возрастает с увеличением  $r$ . Этот результат является убедительным доказательством того, что уравнения поля (16.41) также не согласуются с нашими основными физическими представлениями.