Глава XVII

ПЯТИМЕРНАЯ ТЕОРИЯ КАЛУЗА И ПРОЕКТИВНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

*

Теория Калуза. Остановимся еще на одной попытке создания геометрии (принадлежащей Калуза), в которой как гравитационный, так и электромагнитный потенциалы определяли бы структуру пространства[1]). В то время как Вейль пошел по пути создания неримановой геометрии, Калуза решил увеличить число компонент метрического тензора, изменив число измерений пространства. Он предположил, что, кроме четырех измерений физического пространства, существует еще пятое измерение, не имеющее прямого физического смысла.

Количество компонент симметричного тензора второго ранга в n измерениях равно

$$N=\frac{1}{2}n(n+1). \tag{17.1}$$

В пятимерном пространстве метрический тензор имеет, таким образом, пятнадцать компонент. Для того, чтобы учесть четырехмерный характер физического мира, Калуза предположил, что при соответствующем выборе координат компоненты метрического тензора не будут зависеть от пятой координаты. Наконец, чтобы уменьшить количество переменных на единицу, он принял, что в той системе координат, где переменные поля не зависят от ξ^5, компонента метрического тензора с индексами (5,5) — постоянная и равна единице. Исходя из этих предположений, Калуза показал, что, по крайней мере в первом приближении, четырнадцать дифференциальных уравнений:

$$G_{\mu\nu}=0\ (\mu,\nu=1,\ldots,5,\ \text{кроме}\ G_{55}=0) \tag{17.2}$$

---

[1]) Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., стр. 966 (1921).

эквивалентны четырнадцати уравнениям поля (12.55), определяющим гравитационное и электромагнитные поля, если компоненты метрического тензора, в которых один индекс равен 5, отождествить с электромагнитными потенциалами.

Вскоре было показано, что эта эквивалентность является не приближенной, а точной, если за гравитационные потенциалы принять „собственные" комбинации компонент метрического тензора.

Чтобы облегчить сравнение теории Калуза с другими теориями, разовьем сначала общий формализм, применимый и в некоторых других теориях, а затем возвратимся к строгой формулировке предположений Калуза.

Четырехмерный формализм в пятимерном пространстве. Рассмотрим пятимерное пространство с координатами ξ^α $(a=1,\ldots,5)$ и метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$. В дальнейшем в этой главе и в главе XVIII предполагается, что греческие индексы пробегают значения от 1 до 5, в то время как латинские индексы — от 1 до 4. В этом пространстве мы введем четыре параметра x^a $(a=1,\ldots,4)$, которые являются функциями координат ξ^α. Производные этих четырех параметров по координатам $x^a{}_{,\alpha}$ должны быть линейно независимы во всех отношениях:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{a_1a_2a_3a_4}\,\delta^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta}\,x^{a_1}{}_{,\alpha_1}\cdot x^{a_2}{}_{,\alpha_2}\cdot x^{a_3}{}_{,\alpha_3}\cdot x^{a_4}{}_{,\alpha_4}\neq 0,\\ \text{по крайней мере для одного из значений } \beta.\end{array}\right\}\qquad(17.3)$$

В пятимерном пространстве эти четыре параметра определяют совокупность кривых $x^a=\text{const}$. Через каждую точку пятимерного пространства проходит одна из этих кривых. Будем рассматривать эти кривые, как новую инвариантную структуру в пятимерном пространстве. Эта структура остается неизменной при „параметрических преобразованиях"

$$x^{*a}=f^a(x^b).\qquad(17.4)$$

Покажем, что возможно ввести величины, преобразующиеся при параметрических преобразованиях, как четырехмерные тензоры. В физической интерпретации, на которой мы

остановимся ниже, многообразие, характеризуемое параметрами x^a, будет рассматриваться как физическое пространство; поэтому исследуем, насколько геометрия пространства x^a связана с геометрией обычного четырехмерного риманова пространства.

Совокупность функций от ξ^a, характеризующихся индексами, пробегающими значения от 1 до 4, и преобразующихся при параметрических преобразованиях, как четырехмерные тензоры, назовем „p-тензором" (сокращение от „parameter tensor"). Производные x^a по координатам

$$\gamma^a_\alpha = x^a{}_{,\alpha} \tag{17.5}$$

являются контравариантными p-векторами и ковариантными (обычными) векторами. С помощью этих величин можно ввести векторное поле A^α, определяемое векторами, касательными к кривым $x^a = \text{const}$, которое удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \gamma^a_\alpha A^\alpha &= 0, \\ \gamma_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

Эти пять условий полностью определяют **A**-поле.

С помощью γ^a_α и A^α можно определить поле „взаимное γ", γ^α_a, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^a_\alpha \gamma^\alpha_b &= \delta^a_b, \\ A_\alpha \gamma^\alpha_a &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

Эти двадцать условий полностью определяют γ^α_a.

Каждому (обычному) вектору V^a или W_β можно поставить в соответствие скаляр или p-вектор:

$$\left.\begin{aligned} V^a &= \gamma^a_\alpha V^\alpha, \\ V &= A_\alpha V^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

$$\left.\begin{aligned} W_b &= \gamma^\beta_b W_\beta, \\ W &= A^\beta W_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{17.9}$$

Скаляр представляет собой часть **V** или **W**, параллельную **A**, тогда как p-вектор — часть, нормальную к **A**.

С другой стороны, p-вектору U^a можно поставить в соответствие обычный вектор

$$U^\alpha = \gamma^\alpha_a U^a \tag{17.10}$$

(условие суммирования распространяется и на p-индексы); этот вектор ортогонален **A**, независимо от выбора U^a (в силу последних четырех уравнений (17.7)).

Метрическому тензору $\gamma_{\alpha\beta}$ можно сопоставить ковариантный p-тензор

$$g_{ab} = \gamma^\alpha_a \gamma^\beta_b \gamma_{\alpha\beta}, \tag{17.11}$$

который мы будем называть метрическим p-тензором или p-метрикой.

Смешанные γ-величины обоего типа и вектор A^α дают нам возможность разложить каждое пятимерное соотношение на „четырехмерное" и скалярное соотношения. Смешанные γ-величины „проектируют" пятимерное пространство на наше четырехмерное. Если их произведение свернуть по p-индексам, получим типичный проективный тензор

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^\alpha_\alpha \gamma^\beta_a = \varepsilon^\beta_\alpha, \\ &\varepsilon^\beta_\alpha A_\beta = 0, \quad \varepsilon^\beta_\alpha A^\alpha = 0, \quad \varepsilon^\beta_\alpha \varepsilon^\gamma_\beta = \varepsilon^\gamma_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{17.12}$$

Произведение любого вектора на ε^β_α ортогонально **A**. Легко показать, что ε^β_α может быть выражен через символ Кронекера и вектор **A**:

$$\varepsilon^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta. \tag{17.13}$$

Доказательство производится посредством умножения выражения $(\delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta - \varepsilon^\beta_\alpha)$ на пять линейно независимых пятикомпонентных совокупностей γ^α_a, A^α. Все пять произведений

$$(\delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta - \varepsilon^\beta_\alpha)\, \gamma^\alpha_a = 0,$$
$$(\delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta - \varepsilon^\beta_\alpha)\, A^\alpha = 0$$

равны нулю. Но если произведение пятирядной матрицы на пять независимых „векторов" равно нулю, то такая матрица будет нулевой матрицей.

Каждый вектор может быть представлен через соответствующие ему p-вектор и скаляр следующим образом:

$$U^\alpha = \gamma^\alpha_a U^a + A^\alpha U. \tag{17.14}$$

Действительно, если заменить U^α и U выражениями (17.8), то для правой части (17.14) получим

$$\gamma^\alpha_a \gamma^a_\beta U^\beta + A^\alpha A_\beta U^\beta = (\varepsilon^\alpha_\beta + A^\alpha A_\beta) U^\beta = \delta^\alpha_\beta U^\beta = U^\alpha.$$

Анализ в p-формализме. Кроме дифференциальных ковариантов риманова пятимерного пространства, существуют еще дифференциальные коварианты, свойственные только рассматриваемому здесь формализму. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Внутреннее произведение (обычной) производной p-тензора на вектор A^α

$$t^{l\ldots}{}_{k\ldots,\alpha} A^\alpha$$

является p-тензором того же типа. Доказательство проводится непосредственным вычислением. Будем называть этот тип ковариантного дифференцирования A-дифференцированием. p-тензор, A-производная которого равна нулю, будем называть полем, цилиндрическим относительно A-поля, или, короче, A-цилиндрическим.

Рассмотрим теперь некоторые из таких A-производных. В первую очередь остановимся на A-производной метрического p-тензора, $g_{mn,\alpha} A^\alpha$. Покажем, что она может быть выражена через ковариантные производные A-поля. Величины $g_{mn,\alpha} A^\alpha$ можно заменить выражением

$$g_{mn,\alpha} A^\alpha = \gamma^\rho_m \gamma^\sigma_n \cdot \gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma g_{rs,\alpha} A^\alpha.$$

Преобразуем произведение, стоящее справа от точки:

$$\begin{aligned}
\gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma g_{rs,\,\alpha} A^\alpha &= [(\gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma g_{rs})_{,\alpha} - (\gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma)_{,\alpha} g_{rs}] A^\alpha = \\
&= [(\gamma_{\rho\sigma} - A_\rho A_\sigma)_{,\alpha} - (\gamma^r_{\alpha,\,\rho} \gamma^s_\sigma + \gamma^r_\rho \gamma^s_{\alpha,\,\sigma}) g_{rs}] A^\alpha = \\
&= [\gamma_{\rho\sigma,\,\alpha} - A_{\rho,\,\alpha} A_\sigma - A_{\sigma,\,\alpha} A_\rho] A^\alpha + \\
&+ (\gamma^r_\alpha \gamma^s_\sigma A^\alpha{}_{,\,\rho} + \gamma^r_\rho \gamma^s_\alpha A^\alpha{}_{,\,\sigma}) g_{rs} = \\
&= (\gamma_{\rho\sigma,\,\alpha} - A_{\rho,\,\alpha} A_\sigma - A_{\sigma,\,\alpha} A_\rho) A^\alpha + \\
&+ (\gamma_{\alpha\sigma} - A_\alpha A_\sigma) A^\alpha{}_{,\,\rho} + (\gamma_{\sigma\rho} - A_\alpha A_\rho) A^\alpha{}_{,\,\sigma} = \\
&= (\gamma_{\rho\sigma,\,\alpha} - A_{\rho,\,\alpha} A_\sigma - A_{\sigma,\,\alpha} A_\rho) A^\alpha + \\
&+ (A_{\sigma,\,\rho} + A_{\rho,\,\sigma}) - A^\alpha (\gamma_{\alpha\sigma,\,\rho} + \gamma_{\alpha\rho,\,\sigma}) + \\
&+ A^\alpha (A_\sigma A_{\alpha,\,\rho} + A_\rho A_{\alpha,\,\sigma}).
\end{aligned}$$

Теперь можно сгруппировать члены таким образом, чтобы получить выражение (пятимерного) тензора:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma g_{rs,\,\alpha} A^\alpha &= (A_{\rho,\,\sigma} + A_{\sigma,\,\rho} - 2\,[\rho\sigma,\,\alpha]\, A^\alpha) - \\
&- (A_{\rho\alpha} A_\sigma + A_{\sigma\alpha} A_\rho) A^\alpha = \\
&= A_{\rho;\,\sigma} + A_{\sigma;\,\rho} - (B_\rho A_\sigma + B_\sigma A_\rho),
\end{aligned}\right\} \quad (17.15)$$

где $A_{\rho\sigma}$ и B_ρ — соответственно тензор и вектор, определяемые выражениями:

$$A_{\rho\sigma} = A_{\rho,\,\sigma} - A_{\sigma,\,\rho}, \quad (17.16)$$

$$B_\rho = A_{\rho\sigma} A^\sigma. \quad (17.17)$$

Для A-производной метрического тензора, находим, таким образом:

$$g_{mn,\,\alpha} A^\alpha = \gamma^\rho_m \gamma^\sigma_n (A_{\rho;\,\sigma} + A_{\sigma;\,\rho}). \quad (17.18)$$

Квадрат линейного элемента

$$d\tau^2 = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

равен сумме квадратов p-линейного элемента

$$ds^2 = g_{ab}\, \gamma^a_\alpha \gamma^b_\beta\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \quad (17.19)$$

и компоненты дифференциала координатного вектора в A-направлении

$$d\tau_A^2 = (A_\alpha d\xi^\alpha)^2.$$

Рассмотрим произвольную кривую в пятимерном пространстве, конечные точки которой суть P_1 и P_2. Если всю кривую сместить так, чтобы все ее точки сдвинулись вдоль A-кривых на одно и то же расстояние, то p-длина кривой

$$s_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} ds \tag{17.20}$$

останется неизменной, если p-метрика является A-цилиндрической. A-длина кривой останется неизменной, если вектор B_ρ равен нулю:

$$B_\rho = 0, \tag{17.21}$$

а (пятимерная) длина кривой не изменится, если A-поле удовлетворяет уравнению Киллинга

$$A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho} = 0. \tag{17.22}$$

Для того, чтобы p-метрика была цилиндрической, достаточно, чтобы правая часть уравнения (17.15) равнялась нулю. Это условие слабее, чем условие Киллинга, так как произведение правой части уравнения (17.15) на A^ρ тождественно равно нулю; другими словами, существует только десять алгебраически независимых компонент уравнения (17.15), в то время как уравнения Киллинга имеют пятнадцать компонент. Очевидно, что из одновременной цилиндричности p-метрики и цилиндричности „A-метрики" следует цилиндричность (пятимерной) метрики, и наоборот.

Далее рассмотрим A-производную от антисимметричного p-тензора φ_{rs},

$$\varphi_{rs} = \gamma_r^\rho \gamma_s^\sigma A_{\rho\sigma}. \tag{17.23}$$

Этот тензор φ_{rs} впоследствии будет интерпретирован, как тензор электромагнитного поля. Его A-производными будут

$$\begin{aligned}\varphi_{rs,\alpha} A^\alpha &= \gamma_r^\rho \gamma_s^\sigma \cdot \gamma_\rho^m \gamma_\sigma^n \varphi_{mn,\alpha} A^\alpha = \\ &= \gamma_r^\rho \gamma_s^\sigma \cdot [\varphi_{\rho\sigma,\alpha} - \varphi_{mn} (\gamma_\rho^m \gamma_\sigma^n)_{,\alpha}] A^\alpha, \\ \varphi_{\rho\sigma} &= \gamma_\rho^r \gamma_\sigma^s \varphi_{rs}.\end{aligned}$$

В квадратных скобках исключим γ^m_ρ и γ^n_σ. Это можно сделать при помощи следующего преобразования:

$$\varphi_{mn}(\gamma^m_\rho\gamma^n_\sigma)_{,\alpha}A^\alpha = \varphi_{mn}(\gamma^m_{\alpha,\rho}\gamma^n_\sigma + \gamma^m_\rho\gamma^n_{\alpha,\sigma})A^\alpha =$$
$$= -\varphi_{mn}(\gamma^m_\alpha\gamma^n_\sigma A^\alpha{}_{,\rho} + \gamma^m_\rho\gamma^n_\alpha A^\alpha{}_{,\sigma}) =$$
$$= \varphi_{\sigma\alpha}A^\alpha{}_{,\rho} - \varphi_{\rho\alpha}A^\alpha{}_{,\sigma}.$$

Поэтому имеем:

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha = \gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[\varphi_{\rho\sigma,\alpha}A^\alpha + \varphi_{\rho\alpha}A^\alpha{}_{,\sigma} - \varphi_{\sigma\alpha}A^\alpha{}_{,\rho}].$$

Так как произведение $\varphi_{\rho\alpha}$ на A^α равно нулю, имеем

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha = \gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s(\varphi_{\rho\sigma,\alpha} + \varphi_{\sigma\alpha,\rho} + \varphi_{\alpha\rho,\sigma})A^\alpha =$$
$$= \gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[(\varepsilon^\mu_\rho\varepsilon^\nu_\sigma A_{\mu\nu})_{,\alpha} + (\varepsilon^\mu_\sigma\varepsilon^\nu_\alpha A_{\mu\nu})_{,\rho} +$$
$$+ (\varepsilon^\mu_\alpha\varepsilon^\nu_\rho A_{\mu\nu})_{,\sigma}]A^\alpha.$$

Чтобы вычислить выражение в квадратных скобках, примем во внимание, что циклическая производная от $A_{\mu\nu}$ равна нулю и что $A^\mu A^\nu A_{\mu\nu}$ также равно нулю. Учитывать при этом нужно только те члены, в которых один из двух множителей ε^μ_ρ заменем на δ^μ_ρ, а другой — на $(-A^\mu A_\rho)$. Тогда получим

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha = -\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[(A_{\mu\sigma}A^\mu A_\rho + A_{\rho\mu}A^\mu A_\sigma)_{,\alpha} +$$
$$+ (A_{\alpha\mu}A^\mu A_\rho + A_{\mu\rho}A^\mu A_\alpha)_{,\sigma} + (A_{\sigma\mu}A^\mu A_\alpha + A_{\mu\alpha}A^\mu A_\sigma)_{,\rho}]A^\alpha =$$
$$= \gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[(B_\sigma A_\rho - B_\rho A_\sigma)_{,\alpha} + (B_\alpha A_\rho - B_\rho A_\alpha)_{,\sigma} +$$
$$+ (B_\sigma A_\alpha - B_\alpha A_\sigma)_{,\rho}]A^\alpha.$$

После проведения дифференцирования большинство членов выпадает, либо в силу того, что $B_\alpha A^\alpha$ равно нулю, либо благодаря тому, что непродифференцированные A_ρ умножаются на γ^ρ_r. Окончательным результатом будет

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha = \gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s(B_{\rho,\sigma} - B_{\sigma,\rho}). \tag{17.24}$$

Рассмотрев „A-дифференцирование“, перейдем к рассмотрению другой дифференциальной операции, „p-дифференцирования“. Назовем выражение

$$V_{|a} \equiv V_{,\alpha}\gamma^\alpha_a \tag{17.25}$$

p-производной от V по x^a. Если функция A-цилиндрическая, p-производная будет обычной производной от V по аргументу x^a. (A-цилиндрическая функция может рассматриваться как функция только параметров x^a.)

p-производные скаляра образуют p-вектор.

Вообще говоря, p-производные не коммутируют. Их перестановочными соотношениями будут

$$V_{|ab} - V_{|ba} = V_{,\rho}(\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a}). \tag{17.26}$$

Если V A-цилиндрическая функция, ее p-производные, являющиеся обычными производными, должны коммутировать, т. е. правая часть уравнения (17.26) обращается в нуль. Поэтому выражение в скобках пропорционально A^ρ:

$$\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a} = A^\rho Q_{ab}. \tag{17.27}$$

Q_{ab} можно найти, умножая уравнение (17.27) на A_ρ:

$$Q_{ab} = A_\rho(\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a}) = \gamma^\rho_b A_{\rho|a} - \gamma^\rho_a A_{\rho|b} = \gamma^\alpha_a \gamma^\beta_b A_{\beta\alpha} = \varphi_{ba}.$$

Отсюда имеем:

$$\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a} = A^\rho \varphi_{ba} \tag{17.28}$$

и

$$V_{|ab} - V_{|ba} = V_{,\rho} A^\rho \varphi_{ba}. \tag{17.26a}$$

p-производные от p-тензора, вообще говоря, не ковариантны. Однако антисимметричные p-производные от p-вектора образуют p-тензор, а циклическая p-производная антисимметричного p-тензора второго ранга также является p-тензором.

Особенный интерес представляет собой p-тензор $\varphi_{rs|t} + \varphi_{st|r} + \varphi_{tr|s}$. Этот тензор можно выразить через антисимметричные производные от A_ρ:

$$\varphi_{rs|t} + \varphi_{st|r} + \varphi_{tr|s} = (\gamma^\rho_r \gamma^\sigma_s A_{\rho\sigma})_{,\tau} \gamma^\tau_t + (\gamma^\sigma_s \gamma^\tau_t A_{\sigma\tau})_{,\rho} \gamma^\rho_r + (\gamma^\tau_t \gamma^\rho_r A_{\tau\rho})_{,\sigma} \gamma^\sigma_s.$$

В силу того, что циклическая производная $A_{\rho\sigma}$ равна нулю, нужно оставить только следующие члены:

$$\varphi_{rs\,|\,t}+\varphi_{st\,|\,r}+\varphi_{tr\,|\,s}=A_{\mu\nu}\left[\gamma_r^\nu(\gamma^\mu_{t\,|\,s}-\gamma^\mu_{s\,|\,t})+\right.$$
$$\left.+\gamma_s^\nu(\gamma^\mu_{r\,|\,t}-\gamma^\mu_{t\,|\,r})+\gamma_t^\nu(\gamma^\mu_{s\,|\,r}-\gamma^\mu_{r\,|\,s})\right].$$

Пользуясь (17.28), антисимметричные p-производные от γ^μ_t можно исключить и окончательным результатом будет

$$\varphi_{rs\,|\,t}+\varphi_{st\,|\,r}+\varphi_{tr\,|\,s}=$$
$$=\gamma_r^\rho\gamma_s^\sigma\gamma_t^\tau(B_\rho A_{\tau\sigma}+B_\sigma A_{\rho\tau}+B_\tau A_{\sigma\rho}). \qquad (17.29)$$

Введем теперь понятие ковариантного дифференцирования p-тензоров. Если V^a является p-вектором, то легко показать, что дифференциальные выражения

$$V^a_{,\rho}+\Gamma^a_{s\rho}V^s$$

образуют смешанный тензор (p-вектор относительно a, вектор относительно ρ), если коэфициенты $\Gamma^a_{s\rho}$ преобразуются согласно закону

$$\Gamma^{*a}_{s\rho}=\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial\xi^{*\rho}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*s}}\left(\frac{\partial x^{*a}}{\partial x^l}\Gamma^l_{k\sigma}-\gamma^l_\sigma\frac{\partial^2 x^{*a}}{\partial x^l\partial x^k}\right). \qquad (17.30)$$

Имеется $5\times4\times4$ величин $\Gamma^a_{b\rho}$. Чтобы их найти, нужно задать такое же количество связывающих их соотношений. Условия

$$\gamma^a_{a;\,\rho}=0 \qquad (17.31)$$

слишком жестки, так как их больше, чем нужно, с другой стороны, условий

$$g_{ab;\,\rho}=0 \qquad (17.32)$$

слишком мало. Необходимые условия должны зависеть от трех индексов, одного координатного и двух параметрических. Условия

$$\gamma^a_\alpha\gamma^\alpha_{s;\,\rho}=0 \qquad (17.33)$$

являются как раз условиями такого типа. Непосредственное вычисление показывает, что эти условия удовлетворяются, если $\Gamma^b_{a\rho}$ принимают значения

$$\Gamma^b_{a\rho} = \gamma^b_\beta \gamma^\alpha_a \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\rho \end{Bmatrix} - \gamma^b_{\rho\,|\,a} \equiv \begin{Bmatrix} b \\ a\rho \end{Bmatrix}. \tag{17.34}$$

Можно также показать, что при таком выборе $\Gamma^b_{a\rho}$ удовлетворяются и условия (17.32). Однако условия (17.31) не удовлетворяются, вместо них имеем

$$\gamma^\alpha_{a;\,\rho} = A^\alpha A_\varkappa \left(\gamma^\varkappa_{a,\,\rho} + \begin{Bmatrix} \varkappa \\ \sigma\rho \end{Bmatrix} \gamma^\sigma_a \right) =$$
$$= A^\alpha A_\varkappa \gamma^\varkappa_{a;\,\rho} = -\gamma^\varkappa_a A^\alpha A_{\varkappa;\,\rho}. \tag{17.35}$$

Ковариантную p-производную тензора или p-тензора по x^a определим, как ковариантную производную по ξ^α, умноженную на γ^α_a.

$$V^\alpha{}_{;\,b} = V^\alpha_{|\,b} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \rho b \end{Bmatrix} V^\rho, \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \rho b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \rho\beta \end{Bmatrix} \gamma^\beta_b \tag{17.36}$$

и

$$V^a{}_{;\,b} = V^a_{|\,b} + \begin{Bmatrix} a \\ sb \end{Bmatrix} V^s, \quad \begin{Bmatrix} a \\ sb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ s\beta \end{Bmatrix} \gamma^\beta_b. \tag{17.37}$$

$\begin{Bmatrix} a \\ sb \end{Bmatrix}$ симметричны в s и b. Известно также, что выражения $g_{ab;\,s}$ равны нулю, если они образованы с помощью выражений (17.34). Отсюда следует, что $\begin{Bmatrix} s \\ ab \end{Bmatrix}$ имеют значения

$$\begin{Bmatrix} s \\ ab \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{sr} (g_{ar\,|\,b} + g_{br\,|\,a} - g_{ab\,|\,r}). \tag{17.38}$$

Обратимся теперь к различным типам тензоров кривизны, которые можно образовать с помощью различных типов аффинной связности. Наиболее просто получить их, составляя различные перестановочные соотношения. В первую

очередь естественно отметить перестановочное соотношение Римана

$$V^{\nu}_{\cdot;\,\iota\varkappa} - V^{\nu}_{\cdot;\,\varkappa\iota} = R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \nu} V^{\lambda}. \tag{17.39}$$

Для получения перестановочных соотношений для производных p-векторов понадобятся ковариантные производные от γ^a_α:

$$\begin{aligned}\gamma^a_{\alpha;\,\rho} &= A_\alpha A^\varkappa \left(\gamma^a_{\varkappa,\,\rho} - \left\{ {\sigma \atop \varkappa\rho} \right\} \gamma^a_\sigma\right) = A_\alpha A^\varkappa \gamma^a_{\varkappa;\,\rho} = \\ &= -A_\alpha \gamma^a_\varkappa A^\varkappa_{;\,\rho}.\end{aligned} \tag{17.40}$$

Отсюда получаем перестановочные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} V^n_{;\,\iota\varkappa} - V^n_{;\,\varkappa\iota} &= (\gamma^n_\nu V^\nu)_{;\,\iota\varkappa} - (\gamma^n_\nu V^\nu)_{;\,\varkappa\iota} = \\ &= \gamma^n_\nu (V^\nu_{;\,\iota\varkappa} - V^\nu_{;\,\varkappa\iota}) + V^\nu (\gamma^n_{\nu;\,\iota\varkappa} - \\ &- \gamma^n_{\nu;\,\varkappa\iota}) = V^\lambda \gamma^n_\nu R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \nu} + \\ &+ (\gamma^n_{\nu;\,\iota\varkappa} - \gamma^n_{\nu;\,\varkappa\iota}) V^\nu. \end{aligned}\right\} \tag{17.41}$$

Выражение $\gamma^n_{\nu;\,\iota\varkappa} - \gamma^n_{\nu;\,\varkappa\iota}$ может быть преобразовано следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^n_{\nu;\,\iota\varkappa} - \gamma^n_{\nu;\,\varkappa\iota} &= (\gamma^n_\sigma A^\sigma_{;\,\varkappa} A_\nu)_{;\,\iota} - (\gamma^n_\sigma A^\sigma_{;\,\iota} A_\nu)_{;\,\varkappa} = \\ &= (\gamma^n_{\sigma;\,\iota} A^\sigma_{;\,\varkappa} - \gamma^n_{\sigma;\,\varkappa} A^\sigma_{;\,\iota}) A_\nu + \\ &+ \gamma^n_\sigma A_\nu (A^\sigma_{;\,\varkappa\iota} - A^\sigma_{;\,\iota\varkappa}) + \\ &+ \gamma^n_\sigma (A^\sigma_{;\,\varkappa} A_{\nu;\,\iota} - A^\sigma_{;\,\iota} A_{\nu;\,\varkappa}) = \\ &= \gamma^n_\sigma [A^\sigma_{;\,\varkappa} A_{\nu;\,\iota} - A^\sigma_{;\,\iota} A_{\nu;\,\varkappa} - \\ &- R_{\iota\varkappa\rho\cdot}^{\ \ \ \sigma} A^\rho A_\nu], \end{aligned}\right\} \tag{17.42}$$

так как здесь скобки второй строки обращаются в нуль. Подставляя это в (17.41), после небольших преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned} V^n_{;\,\iota\varkappa} - V^n_{;\,\varkappa\iota} &= R_{\iota\varkappa l\cdot}^{\ \ \ n} V^l, \\ R_{\iota\varkappa l\cdot}^{\ \ \ n} &= \gamma^n_\nu \gamma^\lambda_l (R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \nu} + A^\nu_{;\,\varkappa} A_{\lambda;\,\iota} - A^\nu_{;\,\iota} A^\lambda_{;\,\varkappa}). \end{aligned}\right\} \tag{17.43}$$

„Смешанный“ тензор кривизны $R_{\iota\varkappa l.}^{\ \ \ n}$ также может быть выражен через $\left\{ {b \atop a\sigma} \right\}$:

$$R_{\iota\varkappa l.}^{\ \ \ n} = \left\{ {n \atop l\iota} \right\}_{,\varkappa} - \left\{ {n \atop l\varkappa} \right\}_{,\iota} - \left\{ {n \atop s\iota} \right\} \left\{ {s \atop l\varkappa} \right\} + \left\{ {n \atop s\varkappa} \right\} \left\{ {s \atop l\iota} \right\}. \quad (17.44)$$

Найдем далее перестановочные соотношения для ковариантных p-производных (обычного) вектора:

$$\left.\begin{aligned} V^{\nu}{}_{;ik} - V^{\nu}{}_{;ki} &= \gamma_k^{\varkappa} (\gamma_l^{\iota} V^{\nu}{}_{;\iota})_{;\varkappa} - \gamma_l^{\iota} (\gamma_k^{\varkappa} V^{\nu}{}_{;\varkappa})_{;\iota} = \\ &= \gamma_l^{\iota} \gamma_k^{\varkappa} (V^{\nu}{}_{;\iota\varkappa} - V^{\nu}{}_{;\varkappa\iota}) + \\ &+ V^{\nu}{}_{;\rho} (\gamma_k^{\sigma} \gamma_l^{\rho}{}_{;\sigma} - \gamma_l^{\sigma} \gamma_k^{\rho}{}_{;\sigma}) = \\ &= \gamma_l^{\iota} \gamma_k^{\varkappa} [R_{\iota\varkappa\lambda.}^{\ \ \ \nu} V^{\lambda} + A_{\varkappa\iota} A^{\rho} V^{\nu}{}_{;\rho}]. \end{aligned}\right\} \quad (17.45)$$

Аналогичные вычисления дают перестановочные соотношения для p-производных p-вектора:

$$\left.\begin{aligned} V^{n}{}_{;ik} - V^{n}{}_{;ki} &= (\gamma_{\nu;ik}^{n} - \gamma_{\nu;ki}^{n}) V^{\nu} + \\ &+ \gamma_{\nu}^{n} (V^{\nu}{}_{;ik} - V^{\nu}{}_{;ki}) = \\ &= \gamma_l^{\iota} \gamma_k^{\varkappa} (R_{\iota\varkappa l.}^{\ \ \ n} V^{l} + A_{\varkappa\iota} A^{\rho} V^{n}{}_{;\rho}) = \\ &= \gamma_l^{\iota} \gamma_k^{\varkappa} [(R_{\iota\varkappa l.}^{\ \ \ n} + A_{\varkappa\iota} \gamma_{\nu}^{n} \gamma_l^{\lambda} A^{\nu}{}_{;\lambda}) V^{l} + A_{\varkappa\iota} A^{\rho} V^{n}{}_{,\rho}]. \end{aligned}\right\} \quad (17.46)$$

С другой стороны, эти же перестановочные соотношения можно выразить через $\left\{ {l \atop ik} \right\}$:

$$\left.\begin{aligned} &V^{n}{}_{;ik} - V^{n}{}_{;ki} = R_{ikl.}^{\ \ \ n} V^{l} + V^{n}{}_{,\rho} A^{\rho} \varphi_{ki}, \\ &R_{ikl.}^{\ \ \ n} = \left\{ {n \atop li} \right\}_{,k} - \left\{ {n \atop lk} \right\}_{,i} - \left\{ {n \atop si} \right\} \left\{ {s \atop lk} \right\} + \left\{ {n \atop sk} \right\} \left\{ {s \atop li} \right\}. \end{aligned}\right\} (17.47)$$

Сравнение правых частей уравнений (17.47), (17.46) (17.43) дает соотношения, связывающие величины $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ и $R_{\iota\varkappa\lambda.}^{\ \ \ \nu}$:

$$R_{ikl.}^{\ \ \ n} = \gamma_i^{\iota} \gamma_k^{\varkappa} \gamma_l^{\lambda} \gamma_{\nu}^{n} (R_{\iota\varkappa\lambda.}^{\ \ \ \nu} + A^{\nu}{}_{;\lambda} A_{\varkappa\iota} + A^{\nu}{}_{;\varkappa} A_{\lambda;\iota} - A^{\nu}{}_{;\iota} A_{\lambda;\varkappa}). \quad (17.48)$$

Особенно существенными для применения этого формализма к теории Калуза являются выражения, получающиеся в результате двойного свертывания этих уравнений;

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^l_n g^{kl} R_{ikl.}{}^n = \\
&\quad = \varepsilon^i_\nu (\gamma^{\varkappa\lambda} - A^\varkappa A^\lambda [R_{i\varkappa\lambda.}{}^\nu + A^\nu{}_{;\lambda} A_{\varkappa i} + \\
&\quad + A^\nu{}_{;\varkappa} A_{\lambda;i} - A^\nu{}_{;i} A_{\lambda;\varkappa}] = \\
&\quad = (\delta^i_\nu - A^i A_\nu)(\gamma^{\varkappa\lambda} - A^\varkappa A^\lambda) R_{i\varkappa\lambda.}{}^\nu + \\
&\quad + (\gamma^{\varkappa\lambda} - A^\varkappa A^\lambda)[A^\rho{}_{;\lambda} A_{\varkappa\rho} + \\
&\quad + A^\rho{}_{;\varkappa} A_{\lambda;\rho} - A^\rho{}_{;\rho} A_{\lambda;\varkappa}] = \\
&\quad = R - 2A^\varkappa A^\lambda R_{\varkappa\lambda} + \gamma^{\varkappa\lambda}[A^\rho{}_{;\lambda} A_{\varkappa\rho} + \\
&\quad + A^\rho{}_{;\varkappa} A_{\lambda;\rho} - A^\rho{}_{;\rho} A_{\lambda;\varkappa}] + B_\rho B^\rho = \\
&\quad = R - 2A^\varkappa A^\lambda R_{\varkappa\lambda} + 2A^\rho{}_{;\sigma} A^\sigma{}_{;\rho} - \\
&\quad - \gamma^{\rho\sigma} A^\tau{}_{;\rho} A_{\tau;\sigma} - (A^\rho{}_{;\rho})^2 + B_\rho B^\rho.
\end{aligned}\right\} \qquad (17.49)$$

Член $(-2A^\varkappa A^\lambda R_{\varkappa\lambda})$, входящий в это выражение, представим в несколько иной форме:

$$A^\varkappa A^\lambda R_{i\varkappa\lambda.}{}^i = A^\varkappa (A^i{}_{;i\varkappa} - A^i{}_{;\varkappa i}) = A^\varkappa (A^i{}_{;i})_{,\varkappa} - \\ - B^i{}_{;i} + A^\varkappa{}_{;i} A^i{}_{;\varkappa}. \qquad (17.50)$$

Подставляя (17.50) в (17.49), найдем, что скалярная p-кривизна связана с (обычной) скалярной кривизной соотношением

$$\delta^l_n g^{kl} R_{ikl.}{}^n = R - \gamma^{\rho\sigma} A^\tau{}_{;\rho} A_{\tau;\sigma} - \\ - (A^\rho{}_{;\rho})^2 + B_\rho B^\rho - 2A^\varkappa (A^i{}_{;i})_{,\varkappa} + 2B^i{}_{;i}. \qquad (17.51)$$

Следует подчеркнуть, что с точки зрения теории инвариантов развитый здесь формализм представляет собой не что иное, как теорию поля единичных векторов в метрическом пространстве. Значение такого представления состоит в том, что в единых теориях поля, использующих пяти-

мерный формализм для описания физического мира, четыре параметра x^a предполагаются представляющими четыре координаты нашего физического пространства.

Специальный тип системы координат. Отвлекаясь от ковариантных предположений, касающихся поля **A**, которое характеризует данную единую теорию поля, следует отметить, что большинство авторов ограничивается рассмотрением специального типа системы координат, в которой параметры $x^1, \ldots, x^4$ отождествляются с первыми четырьмя координатами $\xi^1, \ldots, \xi^4$, в то время как пятая координата выбирается так, чтобы компонента A^5 вектора **A** равнялась единице. Остальные четыре компоненты $A^1, \ldots, A^4$ равны нулю. Систему координат, удовлетворяющую этим условиям, назовем „специальной системой координат". Единственными преобразованиями координат, переводящими одну „специальную систему координат" в другую, будут преобразования типа

$$\left.\begin{aligned} &\xi^{*a} = f^a(\xi^s) \text{ совместно с } x^{*a} = f^a(x^s), \\ &\xi^{*5} = \xi^5 + f^5(\xi^s). \end{aligned}\right\} \tag{17.52}$$

Такие преобразования назовем „специальными преобразованиями координат".

В специальной системе координат метрический тензор имеет компоненты

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} g_{ab} + \varphi_a\varphi_b, & \varphi_a \\ \varphi_b, & 1 \end{Bmatrix}, \quad \gamma^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} g^{ab}, & -g^{as}\varphi_s \\ -g^{bs}\varphi_s, & 1 + g^{rs}\varphi_r\varphi_s \end{Bmatrix}, \tag{17.53}$$

где φ_a представляют собой первые четыре ковариантных компоненты **A**:

$$A_\rho = (\varphi_r, 1). \tag{17.54}$$

Закон преобразования g_{ab} таков же, как и для p-тензоров, и поэтому не зависит от функции f^5 в (17.52). С другой стороны, φ_r преобразуются согласно законам

$$\varphi_r^* = \frac{\partial \xi^s}{\partial \xi^{*r}}(\varphi_s - f^5{}_{,s}). \tag{17.55}$$

Таковы законы преобразования гравитационных и электромагнитных потенциалов относительно „координатных“ и „градиентных“ преобразований. (Выражение „градиентное преобразование“ не следует понимать в смысле градиентных преобразований Вейля.)

Различные дифференциальные операции, рассмотренные в настоящей главе, принимают в специальной системе координат специфическую форму. A-дифференцирование сводится просто к дифференцированию по ξ^5:

$$V^{i\cdots}{}_{k\ldots,\alpha}A^{\alpha}=V^{i\cdots}{}_{k\ldots,5}. \tag{17.56}$$

Чтобы получить выражение для p-производных, найдем сперва значения γ^a_α и γ^α_a в специальной системе координат:

$$\begin{aligned}\gamma^a_\alpha&=\left\{\begin{array}{c|c}\alpha=1,\ \ldots,\ 4 & \alpha=5\\ \delta^a_\alpha & 0\end{array}\right\},\\ \gamma^\alpha_a&=\left\{\begin{array}{c|c}\alpha=1,\ \ldots,\ 4 & \alpha=5\\ \delta^\alpha_a & -\varphi_a\end{array}\right\}.\end{aligned} \tag{17.57}$$

Для p-производных получим выражения

$$V_{|a}=V_{,a}-\varphi_aV_{,5}. \tag{17.58}$$

p-тензор φ_{rs} приводится к виду

$$\varphi_{rs}=\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_sA_{\rho\sigma}=\varphi_{r,s}-\varphi_{s,r}-\varphi_s\varphi_{r,5}+\varphi_r\varphi_{s,5}. \tag{17.59}$$

Вектор B_ρ имеет компоненты

$$B_\rho=(\varphi_{s,5},\ 0), \tag{17.60}$$

а для скаляра $A^\rho{}_{;\rho}$ получим

$$A^\rho{}_{;\rho}=A^\rho{}_{,\rho}+\left\{\begin{matrix}\rho\\ \sigma\rho\end{matrix}\right\}A^\sigma=\left\{\begin{matrix}\rho\\ 5\rho\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma,5}=$$
$$=\frac{1}{2}(\log|\gamma_{\alpha\beta}|)_{,5}.$$

Детерминант $|\gamma_{\alpha\beta}|$ можно выразить только через g_{rs}. Умножая последний столбец его [см. (17.53)] на φ_b и вычитая результат из первого столбца, получим

$$|\gamma_{\alpha\beta}|=\begin{vmatrix}g_{ab}+\varphi_a\varphi_b, & \varphi_a\\ \varphi_b\ , & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}g_{ab}, & \varphi_a\\ 0\ , & 1\end{vmatrix}=|g_{ab}|. \tag{17.61}$$

Отсюда найдем для $A^{\rho}{}_{;\rho}$:

$$A^{\rho}{}_{;\rho} = \frac{1}{2}(\log|g_{rs}|)_{,5} = \frac{1}{2} g^{rs} g_{rs,5}. \qquad (17.62)$$

В специальной системе координат производные A-цилиндрического p-тензора по ξ^5 равны нулю. Если производные (обычного) тензора по ξ^5 равны нулю в одной специальной системе координат, то они равны нулю в каждой специальной системе координат, и мы будем называть такой пятимерный тензор A-цилиндрическим.

Оказывается, что (обычные) производные тензоры по ξ^5 образуют тензор того же типа. В общей системе координат эти дифференциальные выражения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} V^{t\ldots}{}_{\varkappa\ldots,5} &= V^{t\ldots}{}_{\varkappa\ldots,\rho} A^{\rho} - A^{t}{}_{,\rho} V^{\rho\ldots}{}_{\varkappa\ldots} - \ldots \\ &\quad + A^{\rho}{}_{,\varkappa} V^{t\ldots}{}_{\rho\ldots} + \ldots \\ &= V^{t\ldots}{}_{\varkappa\ldots;\rho} A^{\rho} - A^{t}{}_{;\rho} V^{\rho\ldots}{}_{\varkappa\ldots} - \ldots \\ &\quad + A^{\rho}{}_{;\varkappa} V^{t\ldots}{}_{\rho\ldots} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (17.63)$$

Если этот тензор равен нулю, то тензор $V^{t\ldots}{}_{\varkappa\ldots}$ называется A-цилиндрическим. Как и выше, метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ будет A-цилиндрическим в том случае, когда удовлетворяются уравнения Киллинга (17.22). Согласно обобщенному определению A-цилиндричности, γ^{α}_{α} A-цилиндричны, в то время как γ^{α}_{a}, вообще говоря, таковыми не являются.

Ковариантная формулировка теории Калуза. Ограничения, наложенные Калуза на пятимерную метрику, эквивалентны предположению, что она является A-цилиндрической, т. е., что A_{ρ} удовлетворяют уравнениям Киллинга (17.22). Вследствие этого векторы B_{ρ} равны нулю, и A-кривые являются геодезическими. Из уравнения (17.18) следует, что p-метрика также является A-цилиндрической.

Далее, в силу уравнений (17.24), φ_{rs} также является A цилиндрическим тензором. В p-тензоре $(\varphi_{rs|t} + \varphi_{st|r} + \varphi_{tr|s})$ черточки могут быть заменены запятыми — обыч-

ным дифференцированием по параметру x^a. В силу (17.29), этот p-тензор равен нулю:

$$\varphi_{rs,\,t}+\varphi_{st,\,r}+\varphi_{tr,\,s}=0. \tag{17.64}$$

Эта совокупность уравнений является условием, которое должно удовлетворяться в том случае, когда φ_{rs} представляет собой антисимметричные производные четырехмерной функции Φ_r. Эти четыре функции определяются φ_{rs} с точностью до произвольного аддитивного градиента.

В „специальной системе координат", в силу уравнений (17.60) и (17.59), величины φ_r и их антисимметричные производные φ_{rs},

$$\varphi_{rs}=\varphi_{r,\,s}-\varphi_{s,\,r}, \tag{17.65}$$

не зависят от ξ^5.

Мы видим, что в теории Калуза при выборе специальной системы координат как g_{rs}, так и φ_r, не зависят от ξ^5 и что антисимметричные производные от φ_r образуют p-тензор. Если не использовать специальной системы координат, то определить φ_r становится невозможным, но p-тензор φ_{rs} тем не менее удовлетворяет второй паре уравнений Максвелла (17.64), а g_{rs} и φ_{rs} являются функциями только четырех аргументов x^a. Поэтому g_{rs} и φ_{rs} обладают всеми свойствами, соответственно, гравитационных потенциалов и электромагнитных напряженностей поля общей теории относительности.

Чтобы получить уравнения поля, Калуза предположил, что лагранжианом вариационного принципа является пятимерная скалярная кривизна R, умноженная на квадратный корень из детерминанта $|\gamma_{\alpha\beta}|$. Пятимерная скалярная кривизна связана со скалярной p-кривизной с помощью (17.51). Так как B_ρ в теории Калуза обращается в нуль, и так как только антисимметрические части ковариантных производных A_ρ не исчезают, (17.51) сводится к следующему виду:

$$R=\delta^i_n g^{kl}R_{ikl.}{}^{n}+\frac{1}{4}A_{\rho\sigma}A^{\rho\sigma}=\delta^i_n g^{kl}R_{ikl.}{}^{n}+\frac{1}{4}\varphi_{rs}\varphi^{rs}. \tag{17.66}$$

В силу (17.61), в специальной системе координат детерминант $|\gamma_{\alpha\beta}|$ может быть заменен на $|g_{ab}|$. Так как

лагранжиан A-цилиндричен, то вариационный интеграл может быть распространен как на пятимерную область координат ξ^α, так и на четырехмерную область параметров x^a. Поэтому для вариационного принципа Калуза имеем:

$$\delta \int \left(\delta^l_n g^{kl} R_{lkl.}^{\ \ \ n} + \frac{1}{4} \varphi_{rs} \varphi^{rs} \right) \sqrt{-g}\, \mathbf{dx} = 0, \qquad (17.67)$$

где вариации подчиняются условиям

$$(\delta g^{rs})_{,5} = 0, \quad (\delta \varphi_r)_{,5} = 0. \qquad (17.68)$$

Этот вариационный принцип эквивалентен уравнению (12.56). Получающиеся отсюда уравнения поля таковы же, как и в общей теории относительности (включая электромагнитное поле).

Проективные теории поля. Калуза ввел пятое измерение исключительно с целью увеличения числа компонент метрического тензора, не приписывая ему никакого реального смысла. Аналогичная операция производится и в так называемых проективных геометриях, которые описывают n-мерное пространство при помощи $n+1$ однородных координат. В проективной геометрии все „проективные точки", для которых все отношения $n+1$ однородных координат имеют одинаковые значения, рассматриваются, как „одна и та же" точка. Некоторые авторы, в частности Веблен и Гофман[1]) и Паули[2]) использовали этот принцип при создании своих единых теорий поля. Наш общий формализм применим и к их теориям, однако геометрическая интерпретация будет иной. Пятимерные координаты должны рассматриваться как „проективные координаты", в то время как реальное пространство является четырехмерным пространством параметров x^a. Каждая „проективная" A-кривая является только точкой в реальном пространстве. Поэтому метрика по существу является A-цилиндрической. С точки

---

[1]) O. Veblen, Projektive Relativitätstheorie, Berlin, Springer, 1933, часть: „Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete. (Содержит библиографию.)

[2]) W. Pauli, Ann. d. Physik, 18, 305 (1933); 18, 337 (1933).

зрения нашего общего формализма нет разницы между теориями Калуза, Веблена и Гофмана и Паули. Уравнения поля во всех трех теориях одни и те же. Однако в каждой из этих трех теорий авторами используются различные системы координат.

Специальную систему координат Калуза мы уже рассмотрели. Обозначим его координаты через $x^1, \ldots, x^4, x^0$ $(=\xi^5)$. Веблен и Гофман выбрали систему координат, более часто встречающуюся в проективной геометрии. Она связана с координатами Калуза уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \xi^s &= x^s, \\ \xi^5 &= e^{x^0}. \end{aligned}\right\} \tag{17.69}$$

В такой системе координат компоненты метрического тензора имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{55} &= e^{-2x^0}, \\ \gamma_{5a} &= \varphi_a e^{-x^0}, \\ \gamma_{ab} &= (g_{ab} + \varphi_a \varphi_b). \end{aligned}\right\} \tag{17.70}$$

Их выбор координат допускает, помимо преобразований первых четырех координат друг в друга, еще преобразования вида

$$\xi^{*5} = F(x^a)\,\xi^5, \tag{17.71}$$

при которых компоненты метрического тензора преобразуются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^*_{55} &= \frac{1}{F^2}\gamma_{55} = \frac{1}{F^2} e^{-2x^0}, \\ \gamma^*_{5a} &= \frac{1}{F}\left[A_a - (\log F)_{,a}\right] e^{-x^0}, \\ g^*_{ab} &= g_{ab}. \end{aligned}\right\} \tag{17.72}$$

Паули выбрал систему координат, которая может быть в полном смысле слова названа однородной [1]). Его координаты связаны с координатами Калуза уравнениями:

$$X^{\alpha} = f^{\alpha}(x^{s})\, e^{x^{0}}, \tag{17.73}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{a} &= \overset{(0)}{h}{}^{a}(X^{\rho}), \\ x^{0} &= \log \overset{(1)}{h}(X^{\rho}), \end{aligned}\right\} \tag{17.74}$$

где $\overset{(0)}{h}{}^{a}$ — четыре однородные функции нулевой степени,

$$\overset{(0)}{h}{}^{a}(\alpha X^{\rho}) = \overset{(0)}{h}{}^{a}(X^{\rho}), \tag{17.75}$$

и $\overset{(1)}{h}(X^{\rho})$ — однородная функция первой степени,

$$\overset{(1)}{h}(\alpha X^{\rho}) = \alpha\, \overset{(1)}{h}(X^{\rho}). \tag{17.76}$$

Переходы от одной однородной системы координат к другой производятся при помощи однородных уравнений преобразования первой степени

$$X^{*\rho} = \overset{(1)}{H}{}^{\rho}(X^{\sigma}). \tag{17.77}$$

Контравариантными компонентами вектора **A** в однородных координатах будут

$$A^{\rho} = \frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{0}} = X^{\rho}. \tag{17.78}$$

В формализме Паули сами координаты имеют векторный характер и идентичны с компонентами A^{ρ}.

A-цилиндричность приобретает специфический вид в системе координат Паули. В координатах Калуза *A*-цилиндрический тензор не зависит от координаты x^{0}. При переходе

---

[1]) Подробное изложение теории Паули можно найти в книге Л. Ландау и Е. Лифшица, „Теория поля", ГТТИ, 1941. (*Прим. ред.*)

к координатам Паули тензор $V_{\alpha\ldots}{}^{\beta\ldots}$ преобразуется согласно закону:

$$V^*_{\alpha\ldots}{}^{\beta\ldots}=\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\sigma}\cdots\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\alpha}\cdots V_{\rho\ldots}{}^{\sigma\ldots},$$

где $V_{\rho\ldots}{}^{\sigma\ldots}$ являются функциями только от $x^1, \ldots, x^4$ и, следовательно, однородными функциями нулевой степени относительно X^ρ. Каждый коэфициент $\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\sigma}$ является функцией от $x^1, \ldots, x^4$, умноженной на e^{x^0}, т. е. однородной функцией первой степени относительно X^ρ. С другой стороны, каждый из коэфициентов $\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\alpha}$ является однородной функцией (— 1)-й степени относительно X^ρ. *А-цилиндрический тензор однороден, и степень его однородности равна разности между количествами его контравариантных и ковариантных индексов.*