ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КАЛУЗА

*

Возможные обобщения теории Калуза. Несмотря на то, что теория Калуза не приводит к новым уравнениям поля и не дает ответа на нерешенные вопросы теоретической физики, все же представляется заманчивым произвести на ее основе некоторое изменение общей теории относительности. Вместе с тем, исходя из теории Калуза, можно несколькими способами подойти к созданию новой теории, в которой гравитационное и электромагнитное поля являлись бы частями единого поля.

Одна из попыток обобщения теории Калуза принадлежит Эйнштейну и Майеру [1]). Как и Калуза, они приняли, что физическое пространство является четырехмерным. При этом они ввели пятимерный тензорный анализ, не вводя в то же время пятимерного пространства и пятимерной системы координат. Они предположили, что существуют тензоры, индексы которых пробегают значения от 1 до 5, но компоненты которых являются функциями только четырех координат. Кроме четырехмерных преобразований координат, существуют еще преобразования „пятимерных тензоров" с матрицами преобразования M_α^β и M_β^α. При этом „пятимерные векторы", например, преобразуются согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &V^{*\alpha} = M_\beta^\alpha V^\beta, \\ &W_\alpha^* = M_\alpha^\beta W_\beta, \quad M^\alpha{}_\beta M_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

где $M^\alpha{}_\beta$ — произвольные функции четырех координат. Если ввести пятимерную систему координат, матрица M_β^α образо-

---

[1]) Berl. Ber., 1931, стр. 541; Berl. Ber., 1932, стр. 130.

вывалась бы из производных новых координат по старым

$$M^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial \xi^{*\alpha}}{\partial \xi^{\beta}}$$

и поэтому удовлетворяла бы дифференциальным тождествам

$$M^{\alpha}{}_{\rho,\sigma} - M^{\alpha}{}_{\sigma,\rho} = M^{\alpha}{}_{\rho,s}\,\gamma^{s}_{\sigma} - M^{\alpha}{}_{\sigma,r}\,\gamma^{r}_{\rho} = 0.$$

Однако ничего подобного не предполагается в теории Эйнштейна-Майера. Поэтому количество дифференциальных ковариантов в ней не равно числу таковых в теории Калуза. Хотя здесь также вводятся величины γ^{a}_{α} и γ^{α}_{a} для перевода четырехмерных тензоров в пятимерные и наоборот, выражения

$$\gamma^{a}_{\alpha,\beta} - \gamma^{a}_{\beta,\alpha} = \gamma^{a}_{\alpha,\beta}\,\gamma^{b}_{\beta} - \gamma^{a}_{\beta,b}\,\gamma^{b}_{\alpha},$$

которые равны нулю в теории Калуза, в теории Эйнштейна-Майера, вообще говоря, не равны нулю и даже не являются ковариантными. Выражения

$$\gamma^{\alpha}_{a,b} - \gamma^{\alpha}_{b,a},$$

ковариантные в теории Калуза, не инвариантны в этой теории. С другой стороны, в теории Эйнштейна-Майера существует ряд таких дифференциальных ковариантов, аналогии которых в теории Калуза тождественно равны нулю. Их количество даже столь велико, что не все из них могут получить физическую интерпретацию.

Возможно также обобщение теории Калуза путем ослабления условия A-цилиндричности. Это было сделано Эйнштейном и Бергманом, а позднее Эйнштейном, Баргманом и Бергманом в двух статьях, содержание которых будет вкратце изложено в этой главе [1]).

---

[1]) A. Einstein and P. Bergmann, Ann. of Math., **39**, 683 (1938). A. Einstein, V. Bargmann and P. G. Bergmann. Theodore von Kármán Anniversary Volume, Pasadena, 1941, стр. 212,

Геометрия замкнутого пятимерного мира. В то время как проективные теории, в частности теория Эйнштейна-Майера, рассматривают пространство как четырехмерное, а пятое измерение вводят только как средство для построения нового типа тензорного анализа, теория, рассмотренная в указанных двух статьях, пытается придать пятому измерению более определенный физический смысл.

Физические соображения оправдывают создание такой теории. Не выходя за пределы четырехмерной теории поля, представляется невозможным даже принять во внимание результаты квантовой теории, в частности принцип неопределенности Гейзенберга. Так как описание пятимерного мира при помощи четырехмерного формализма является неполным, была надежда, что из неопределенности „четырехмерных" законов можно получить принцип неопределенности и что квантовые явления в конце концов смогут быть объяснены теорией поля. В настоящее время очевидно, что эти смелые надежды не оправдались. Вообще, вопрос о том, выдержит ли какой-либо пятимерный подход проверку времени, покажет будущее.

Во всяком случае, макроскопический мир четырехмерен, поэтому пятимерный мир должен быть, по крайней мере, приближенно цилиндрическим относительно пятого измерения. Из этих соображений Эйнштейн и его сотрудники предположили, что мир является замкнутым по отношению к пятой координате и представляет собой нечто вроде трубы.

Если вырезать из пятимерного континуума тонкий бесконечно протяженный слой и отождествить его две открытые (четырехмерные) поверхности, получится модель такого замкнутого пятимерного пространства. Все функции поля предполагаются, конечно, непрерывными при переходе через „шов", и поэтому, если трубка достаточно узка (т. е. если слой достаточно тонок), изменение величин поля поперек нее будет мало по сравнению с их изменениями вдоль трубки.

Геометрия замкнутого пятимерного пространства предполагается римановой. Это налагает еще одно ограничитель-

ное условие, которое уменьшает число переменных поля от 15 до 14. Метрику теории Калуза мы называли A-цилиндрической. Другими словами, пространство Калуза является цилиндрическим не только относительно некоторого векторного поля, но и относительно поля единичных векторов **A**. В силу этого A-кривые Калуза являются геодезическими, и в специальной системе координат γ_{55} равна единице. В рассматриваемой геометрии условие цилиндричности Калуза заменяется условием замкнутости пятимерного пространства. Кроме того, предполагается, что геодезические линии вокруг цилиндра, соединяющие данную точку с нею же самой, пересекаются под углом, равным нулю, т. е. являются замкнутыми непрерывными кривыми. Это условие заменяет условие Калуза о цилиндричности его пространства относительно поля единичных векторов.

Через каждую точку пятимерного пространства проходит одна и только одна замкнутая геодезическая линия.

Длину такой линии, один раз обходящей вокруг цилиндра и возвращающейся в исходную точку, будем называть „периметром" пространства в пятом измерении. Докажем теперь, что этот периметр везде имеет одну и ту же величину.

Рассмотрим замкнутую геодезическую линию, проходящую через точку P. Ее длина S равна

$$S=\int_P^P \sqrt{\gamma_{ix}\frac{d\xi^i}{dp}\frac{d\xi^x}{dp}}\,dp=\int_P^P \sqrt{\gamma_{ix}\xi^{i\prime}\xi^{x\prime}}\,dp, \qquad (18.2)$$

где p — произвольная функция координат; путь интегрирования является замкнутой геодезической линией. Изменим теперь координаты каждой точки вдоль этой замкнутой геодезической линии на бесконечно малую величину $\delta\xi^i$ так, чтобы получить новую линию. „Конечная точка" P не считается при этом фиксированной. Разность между длиной

новой линии и длиной старой линии будет равна:

$$\left.\begin{aligned}\delta S &= \int\limits_{\dot{P}}^{P} \frac{\frac{1}{2}\gamma_{\iota\varkappa,\rho}\xi^{\iota'}\xi^{\varkappa'}\delta\xi^{\rho} + \gamma_{\iota\rho}\xi^{\iota'}\delta\xi^{\rho'}}{\sqrt{\gamma_{\iota\varkappa}\xi^{\iota'}\xi^{\varkappa'}}}\, dp = \\ &= \int\limits_{\dot{P}}^{P}\left\{\frac{1}{2}\gamma_{\iota\varkappa,\rho}\dot{\xi}^{\iota}\dot{\xi}^{\varkappa}\delta\xi^{\rho} + \gamma_{\iota\rho}\dot{\xi}^{\iota}\delta\dot{\xi}^{\rho}\right\} d\tau,\end{aligned}\right\} \tag{18.3}$$

где точки означают дифференцирование по τ, угловому расстоянию от P. Интегрируя по частям, получим:

$$\left.\begin{aligned}\delta S &= \int\limits_{\dot{P}}^{P}\left\{\frac{1}{2}\gamma_{\iota\varkappa,\rho}\dot{\xi}^{\iota}\dot{\xi}^{\varkappa}\delta\xi^{\rho} - \gamma_{\iota\rho,\varkappa}\dot{\xi}^{\iota}\dot{\xi}^{\varkappa}\delta\xi^{\rho} - \right. \\ &\left. - \gamma_{\iota\rho}\ddot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\right\} d\tau + \Big[\gamma_{\iota\rho}\dot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big]_{\dot{P}}^{P} = \\ &= -\int\limits_{\dot{P}}^{P}\gamma_{\iota\rho}\left(\ddot{\xi}^{\iota} + \left\{{\iota \atop \varkappa\lambda}\right\}\dot{\xi}^{\varkappa}\dot{\xi}^{\lambda}\right)\delta\xi^{\rho}d\tau + \Big[\gamma_{\iota\rho}\dot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big]_{\dot{P}}^{P}.\end{aligned}\right\} \tag{18.4}$$

Выражение в круглых скобках равно нулю, так как первоначальная линия геодезическая. Поэтому вариация S зависит только от вариации координат в двойной конечной точке

$$\delta S = \Big[\gamma_{\iota\rho}\dot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big]_{\dot{P}}^{P}. \tag{18.5}$$

Выражение в квадратных скобках является скалярным произведением двух векторов: $\dot{\xi}^{\iota}$ и $\delta\xi^{\rho}$, и поэтому инвариантно. Так как $\delta\xi^{\rho}$ на двух границах в действительности представляет одно и то же бесконечно малое смещение, а $\dot{\xi}^{\iota}$ — то же направление, оба члена взаимно уничтожаются и δS обращается в нуль. Таким образом, S остается постоянным при таком переходе от одной замкнутой геоде-

зической линии к другой, когда варьирование происходит так, чтобы все промежуточные линии были геодезическими.

Периметр замкнутого пространства, в котором все пересекающие сами себя геодезические линии являются замкнутыми и непрерывными (без разрывов производной), является, таким образом, постоянной, характеризующей пространство.

Векторы, касательные к замкнутым геодезическим $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}$, образуют поле единичных векторов. Обозначим это поле через **A** и применим к замкнутому пятимерному пространству формализм, рассмотренный в предыдущей главе.

Так как **A**-поле состоит из векторов, касательных к геодезическим, оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям.

$$A^\alpha{}_{;\rho}\, A^\rho = 0, \tag{18.6}$$

что означает согласно уравнениям (17.17) и (17.21), что A-метрика.

$$d\tau_A = A_\alpha d\xi^\alpha \tag{18.7}$$

является A-цилиндрической. Уравнение (18.6) принимает особенно простой вид в специальной системе координат.

Введение специальной системы координат. В специальной системе координат **A** имеет контравариантные компоненты (0,0,0,0,1) и ковариантные компоненты (γ_{5s}, 1). Уравнение (18.6), таким образом, приобретает вид:

$$A^\alpha{}_{,5} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ 55 \end{Bmatrix} = 0, \tag{18.8}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \alpha \\ 55 \end{Bmatrix} = 0, \quad [55, \alpha] = 0, \\ \gamma_{\alpha 5,5} - \frac{1}{2}\gamma_{55,\alpha} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18.8a}$$

Так как в специальной системе координат γ_{55} постоянно и равно единице, для уравнения (18.6) получаем окончательно

$$\gamma_{a5,5} = \varphi_{a,5} = 0, \tag{18.9}$$

другими словами, величины φ_s не зависят от ξ^5.

Остальные компоненты метрического тензора периодичны относительно ξ^5, так как A-кривые замкнуты и возвращаются в любую точку, через которую они проходят. Координатное расстояние точки от самой себя (вокруг трубы) равно метрическому расстоянию, так как γ_{55} равно единице. По тем же соображениям это справедливо и для любой точки в рассматриваемом пространстве.

Все поля, однозначно определенные в нашем замкнутом пространстве, являются периодическими функциями от ξ^5 с периодом S (18.2).

Таким образом, в специальной системе координат пятимерная метрика распадается на совокупность десяти функций g_{mn};

$$g_{mn} = \gamma_{mn} - \varphi_m \varphi_n, \tag{18.10}$$

которые периодичны относительно ξ^5 с периодом S, и на четыре функции φ_m, зависящие только от $\xi^1, \ldots, \xi^4$.

В силу (18.9), вектор B_p, (17.17) и (17.60), равен нулю, а единственными дифференциальными тензорами первого порядка являются

$$\varphi_{rs} = \varphi_{r,s} - \varphi_{s,r} \tag{18.11}$$

[в силу (17.59)] и

$$g_{mn,5} = A_{m;n} + A_{n;m} \tag{18.12}$$

[в силу (17.18)].

Получение уравнений поля из вариационного принципа. Исходя из геометрии замкнутого пятимерного пространства с замкнутыми координатами, Эйнштейн и его сотрудники нашли две различные совокупности уравнений поля. В этой главе мы рассмотрим одну из этих совокупностей.

Можно получить уравнения поля, как уравнения Эйлера-Лагранжа вариационного принципа. Существуют четыре различных дифференциальных скаляра второго порядка, каждый из которых ведет к различным уравнениям поля. Такими скалярами являются:

$$\left.\begin{array}{l} \delta^i_n g^{kl} R_{ikl.}{}^{n}; \quad \varphi_{rs}\varphi^{rs}; \\ (A_{\mu;\nu} + A_{\nu;\mu})(A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho})\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}; \\ (A_{\mu;\nu} + A_{\nu;\mu})(A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho})\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}. \end{array}\right\} \tag{18.13}$$

Все остальные дифференциальные скаляры второго порядка отличаются от линейной комбинации этих четырех только на дивергенцию, которая не вносит изменений в уравнения Эйлера-Лагранжа. Линейная комбинация этих четырех скаляров, умноженная на квадратный корень взятого со знаком минус детерминанта, $\sqrt{-|\gamma_{\rho\sigma}|}$ (или в случае специальной системы координат на $\sqrt{-g}$), и проинтегрированная по пятимерной области координат $\xi^1, \ldots, \xi^5$, является инвариантом.

Вариация такого интеграла

$$I = \int H\sqrt{-g}\, d\xi \tag{18.14}$$

должна сохранять характерные геометрические свойства замкнутого пространства, т. е. при использовании специальной системы координат вариации φ_r не должны зависеть от ξ^5, а вариации g_{mn} должны быть периодичны относительно ξ^5 с периодом S. Поэтому мы не можем потребовать, чтобы вариации φ_r и g^{rs} равнялись нулю на всей

границе произвольной области интегрирования. Однако вариация на границе ничего не добавит к вариации интеграла в том случае, если при интегрировании обход по области совершается вокруг трубы только один раз, другими словами, интегрирование по ξ^5 производится только в пределах одного периода. Кроме того, δg^{rs} и $\delta\varphi_s$ должны при этом обращаться в нуль на той части границы, которая создается A-кривыми. Таким образом, вариация принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}&\delta\int H\sqrt{-g}\,d\xi^1\ldots d\xi^5=\\&=\int\{Q_{rs}\delta g^{rs}+J^s\delta\varphi_s\}\sqrt{-g}\,d\xi^1\ldots d\xi^5,\end{aligned}\right\}\qquad(18.15)$$

где предполагаются выполненными только что указанные условия ($\delta\varphi_s$ не зависит от ξ^5, δg^{rs} является периодической функцией относительно ξ^5, остающейся до известной степени произвольной). Интеграл I будет стационарен, если удовлетворяются следующие уравнения:

$$Q_{rs}=0,\qquad \int\limits_{\xi^5=0}^{s} J^s\sqrt{-g}\,d\xi^5=0.\qquad(18.16)$$

Мы не можем потребовать, чтобы J^s везде обращались в нуль, так как, если интеграл (18.16), который нужно один раз взять вокруг A-кривой, равен нулю, вариации φ_s, постоянные вдоль каждой A-кривой не будут входить в δI.

Интегро-дифференциальные уравнения (18.16) удовлетворяют пяти интегро-дифференциальным тождествам. Если произвести бесконечно малое преобразование специальных координат

$$\left.\begin{aligned}\xi^{*a}&=\xi^a+\delta\xi^a(\xi^s),\\\xi^{*5}&=\xi^5+\delta\xi^5(\xi^s),\end{aligned}\right\}\qquad(18.17)$$

переменные поля g^{rs} и φ_s преобразуются следующим образом:

$$\delta g^{rs} = g^{ri}(\delta\xi^s)_{,t} + g^{ts}(\delta\xi^r)_{,t} - \delta\xi^t g^{rs}{}_{,t} - \delta\xi^5 g^{rs}{}_{,5},$$
$$\delta\varphi_s = -\varphi_t(\delta\xi^t)_{,s} - (\delta\xi^5)_{,s} - \delta\xi^t\varphi_{s,t},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \delta g^{rs} &= g^{ri}(\delta\xi^s)_{;t} + g^{st}(\delta\xi^r)_{;t} - g^{rs}{}_{,5}(A_p\delta\xi^p), \\ \delta\varphi_s &= -\varphi_{st}\delta\xi^t - (A_p\delta\xi^p)_{,s}, \\ A_p\delta\xi^p &= \varphi_t\delta\xi^t + \delta\xi^5. \end{aligned}\right\} \quad (18.18)$$

Если выбрать совокупность $\delta\xi^\alpha$, обращающуюся в нуль на указанной части границы области интегрирования, создаваемой A-кривыми, вариация I при таких бесконечно малых преобразованиях должна обратиться в нуль, даже в том случае, когда уравнения (18.16) не удовлетворяются:

$$\left.\begin{aligned} 0 \equiv \int\{ Q_{rs}[g^{rt}(\delta\xi^s)_{;t} + g^{st}(\delta\xi^r)_{;t} - g^{rs}{}_{,5}(A_p\delta\xi^p)] + \\ + J^s[-(A_p\delta\xi^p)_{,s} - \varphi_{st}\delta\xi^t]\}\sqrt{-g}\,d\xi = \\ = \int\{[-2Q^t_{s;t} + \varphi_{ts}J^t]\delta\xi^s + [-Q_{rs}g^{rs}{}_{,5} - \\ - J^s{}_{;s}](A_p\delta\xi^p)\}\sqrt{-g}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (18.19)$$

При проведении интегрирования по частям, необходимого для получения этих уравнений, были опущены все члены, представляющие собой ковариантные дивергенции. Ковариантная дивергенция p-псевдовектора является линейной комбинацией обычных производных

$$\mathfrak{B}^s{}_{;s} = \mathfrak{B}^s{}_{,s} - (\varphi_s\mathfrak{B}^s)_{,5}. \quad (18.20)$$

Поэтому она обращается в нуль при интегрировании по области, на границе которой компоненты $\mathfrak{B}^s$ исчезают.

В уравнении (18.19) $\delta\xi^\alpha$ не зависят от ξ^5, но во всем остальном остаются произвольными внутри области инте-

грирования. Отсюда можно заключить, что уравнения (18.16) удовлетворяют тождествам

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\xi^5=0}^{s}(2Q^{t}_{s\cdot;t}+\varphi_{ts}J^{t})\sqrt{-g}\,d\xi^5\equiv 0,\\&\int\limits_{\xi^5=0}^{s}(J^{s}_{;s}+Q_{rs}g^{rs}_{,5})\sqrt{-g}\,d\xi^5\equiv 0.\end{aligned}\right\}\qquad(18.21)$$

Относительно вида выражений J^s и Q_{rs} можно сказать следующее. Q_{rs} содержит те же члены, что и уравнения поля общей теории относительности, в которых все производные заменены p-производными

$$g_{rs}\,|\,_t=g_{rs,t}-g_{rs,5}\varphi_t,$$

и так далее; кроме того, Q_{rs} содержит члены, в которых p-метрика продифференцирована по ξ^5. Выражение J^s содержит максвелловские члены $\varphi^{rs}_{;s}$ и, кроме того, члены, являющиеся произведениями p-производных и A-производных от g_{rs}. Другими словами, мировая плотность тока в этой теории не равна нулю.

Дифференциальные уравнения поля. Имеются два возражения против уравнений поля, полученных из вариационного принципа. Во-первых, эти уравнения определяются неоднозначно; всякая линейная комбинация скаляров (18.13), умноженная на $\sqrt{-g}$, может быть использована в качестве лагранжиана. Во-вторых, уравнения поля, полученные таким образом, не являются чисто дифференциальными уравнениями.

Если бы уравнения поля представляли собой систему чисто дифференциальных уравнений, их следовало бы подчинить более сильным тождествам, чтобы они имели решения, имеющие смысл. В действительности же имеется четырнадцать дифференциальных уравнений, связанных четырь-

мя дифференциальными и одним интегро-дифференциальным тождеством; при этом система определена однозначно.

Рассмотрим пятнадцать выражений $G_{\rho\sigma}$, образованных из свернутого пятимерного тензора кривизны

$$G_{\rho\sigma} = R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma}R. \tag{18.22}$$

Эти пятнадцать величин удовлетворяют пяти соотношениям

$$(\sqrt{\gamma}\,G^{\rho\sigma})_{,\sigma} + \sqrt{\gamma}\,G^{\tau\sigma}\begin{Bmatrix}\rho\\ \tau\sigma\end{Bmatrix} \equiv 0. \tag{18.23}$$

Если $\sqrt{\gamma}\,G^{\rho\sigma}$ обозначить через $\mathfrak{G}^{\rho\sigma}$ и выбрать специальную систему координат, (18.23) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}^{rs}{}_{,s} + \mathfrak{G}^{r5}{}_{,5} + \mathfrak{G}^{ts}\begin{Bmatrix} r\\ ts\end{Bmatrix} + 2\mathfrak{G}^{ts}\begin{Bmatrix} r\\ t5\end{Bmatrix} = 0.\\ \mathfrak{G}^{5s}{}_{,s} + \mathfrak{G}^{ts}\begin{Bmatrix} 5\\ ts\end{Bmatrix} + 2\mathfrak{G}^{5s}\begin{Bmatrix} 5\\ 5s\end{Bmatrix} = -\mathfrak{G}^{55}{}_{,5}\end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

Здесь учтено, что, в силу (18.8а), символы Кристоффеля $\begin{Bmatrix}\alpha\\ 55\end{Bmatrix}$ равны нулю. Отсюда видно, что четырнадцать выражений G^{rs} и G^{r5} удовлетворяют четырем дифференциальным тождествам; кроме того, дифференциальное выражение первого порядка, входящее в G^{rs} и G^{r5}, тождественно равно первой производной по ξ^5, и его интеграл по одному периоду A-кривой поэтому равен нулю. Четырнадцать уравнений

$$\left.\begin{aligned} G^{rs} &= 0,\\ I^{s} &= G^{s5} + \varphi_t G^{st} = 0\end{aligned}\right\} \tag{18.25}$$

удовлетворяют, таким образом, нужному количеству тождеств. Они также ковариантны относительно преобразований специальной системы координат в силу того, что G^{rs} и I^s

являются p-тензорами:

$$G^{rs} = \gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma G^{\rho\sigma},$$
$$I^s = \gamma^s_\sigma A_\rho G^{\rho\sigma}.$$

Путем непосредственного, но громоздкого вычисления можно показать, что не существует другой системы четырнадцати дифференциальных уравнений второго порядка, ковариантных относительно преобразований специальной системы координат, удовлетворяющей тождествам, аналогичным (18.25). Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения, полученные из соответствующего вариационного принципа, но в отличие от последних являются чисто дифференциальными. Мировая плотность тока и в этом случае не равна нулю.