квантования, сейчас неизвестно. Развиваемые в последние годы теории супергравитации и суперструн, с которыми связываются амбициозные надежды на построение единой теории всех взаимодействий в природе, пока еще не привели к осязаемым физическим результатам. Мы не будем касаться этих вопросов. Некоторое представление о них можно получить из книг [12, 14, 15, 18].

Если избегать сингулярностей и квантовых эффектов, то ОТО, в принципе, столь же простая и ясная теория, как электродинамика. Это тоже классическая теория поля, близкая по структуре электродинамике; в этом смысле их параллельное изложение в классическом учебнике [7] очень естественно.

При изучении ОТО возникают трудности, связанные с тем, что поле тяготения надо рассматривать не в псевдоевклидовом (плоском) пространстве-времени Минковского (как электромагнитное), а в искривленном пространстве Римана. Объективно геометрия Римана несколько сложнее геометрии Евклида, но, в принципе, вполне ясна; однако обычно она не изучается физиками в достаточном объеме и необходимость преодолеть непривычный математический аппарат затрудняет восприятие ОТО. Уничтожить эту трудность нельзя, но, излагая элементы римановой геометрии, мы будем стараться по крайней мере подчеркнуть ее интуитивные и наглядные стороны, с тем чтобы понятия риманового тензора, связности и т.п. ассоциировались бы не просто с увешанными латинскими и греческими индексами буквами, а с геометрическими образами, допускающими не только формально-вычислительную, но и наглядно-геометрическую трактовку, иногда дающую возможность получить ответ кратчайшим путем.

В том что касается обозначений и выбора метрики, мы следуем последнему (1988 г.) изданию "Теории поля" Ландау и Лифшица [7]. Везде далее латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие индексы – значения 1, 2, 3. Метрический тензор пространства Минковского $\eta_{ik} = \eta^{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$, причем выполнено соотношение $\eta_{in}\eta^{nk} = \delta_i^k$ (где $\delta_i^k$ – символ Кронекера). В основном мы будем пользоваться системой единиц, где скорость света $c = 1$. Ньютоновская гравитационная постоянная будет обозначаться $G$, она равна:

$$G = (6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3/(\text{г}\cdot\text{с}^2).$$

Заметим, что точность, с которой известна гравитационная постоянная, заметно ниже, чем точность, с которой известны другие мировые константы ($10^{-8}$ для $c$, $10^{-7}$ для $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ и т.д.).

## 1.2. Метрика пространства-времени в ОТО. Принцип эквивалентности

Со времен Галилея известно, что движение массивного тела в поле тяжести зависит только от начальной скорости (но не от внутренних характеристик тела) и траектории всех тел с заданной скоростью искривлены в гравитационном поле одинаково. Универсальность действия гравитационного поля (ГП) и является наиболее существенным его отличием от поля электромагнитного. Нельзя также устранить действие ГП и на такой объект, как часы, — это непосредственно связано с предыдущим свойством. Универсальность гравитации приводит к тому, что в ГП нет объектов, которые можно было бы отождествить с прямыми (или окружностями), как в евклидовой геометрии. Любой эталон прямой, например луч света, теперь уже не обладает свойствами прямой линии. Так, в поле тяготения сумма углов треугольника, образованного лучами света, не будет равна $180^{\circ}$. Таким образом, геометрия пространства, если понимать ее как описание свойств лучей света или линеек, при наличии гравитационного поля оказывается неевклидовой. То же относится и к четырехмерному пространству-времени — его уже нельзя описать метрикой Минковского.

Эйнштейн был первым, кто понял, что геометрия в этом случае является римановой (более точно понятие римановой геометрии будет раскрыто ниже). Действительно, в малой области пространства-времени в свободно падающей системе отсчета ГП исчезает (классический пример — лифт Эйнштейна: наблюдатель находится в кабине лифта, свободно падающего в ГП Земли; все эксперименты, которые способен проделать наблюдатель, не выходя из кабины лифта, будут свидетельствовать об отсутствии ГП). Подобные системы мы будем именовать далее локально-инерциальными системами отсчета и любую из них обозначать $L$ и называть $L$-системой. Если в $L$-системе измерять время $t$ синхронизованными по Эйнштейну часами, а расстояния — жесткими масштабами, то метрика в $L$-системе будет метрикой Минковского и квадрат интервала запишется в виде

$$ds^2 = dt^2 - (d\vec{r})^2 \quad . \tag{1}$$

При этом предполагается, что можно пренебречь собственными ГП тел, включенных в систему отсчета. Если речь идет, скажем, о системе отсчета, связанной с Солнцем, то следует находиться достаточно далеко от него.

Утверждение, что в малой области пространства-времени можно избавиться от гравитации подходящим выбором системы отсчета, мы будем называть принципом эквивалентности (ПЭ). Эйнштейн формулировал этот принцип несколько иначе, и в последующей литературе есть разные толкования того, как надо понимать ПЭ. Точная формулировка ПЭ, принимаемая нами, такова: в ограниченной области пространства-времени в системе отсчета, связанной со свободно движущимся в гравитационном поле телом, справедливы законы частной теории относительности.

В формуле (1) предполагается, что $dt$ и $dx^{\alpha}$ измеряются обычными часами и линейками. В пространстве в целом при наличии ГП это сделать уже невозможно. Здесь можно лишь ввести "координаты" $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^0$, рассматривая их как "метки" в пространстве-времени и считая соответствие непрерывным, так что двум близким точкам $P$ и $P'$ соответствуют близкие $x^i$. Тогда, считая, что локально $t$ и $x^\alpha$ в (1) являются дифференцируемыми функциями $x^i$, из ПЭ получаем общий вид интервала:

$$ds^2 = g_{ik}(x^l)\, dx^i dx^k . \tag{2}$$

По определению способ измерения $ds^2$ в формуле (2) задается формулой (1), в которой $dt$ и $d\vec{r}$ измеряются в любой $L$-системе обычными часами и линейками. Но для того чтобы это было возможно, часы, линейки и сам интервал $ds$ должны быть достаточно малы (конкретные ограничения будут рассмотрены ниже). Риманово пространство определено, если симметричный тензор второго ранга $g_{ik}(x)$ задан для всех $x$ (мы не обсуждаем топологию этого пространства). Поскольку необходим локальный переход данного пространства в пространство Минковского, то требуется, чтобы форма $g_{ik}$ была формой 4-го ранга с сигнатурой –2. Это, по определению, означает, что столбцы и строки 4x4 матрицы $g_{ik}$ линейно независимы (нет вырождения) и при приведении $g_{ik}$ к главным осям разность между числом положительных и отрицательных квадратов в диагональной форме равна –2. Напомним, что по известной в математике теореме, называемой теоремой инерции квадратичных форм, сигнатура является инвариантом.

Если рассматривать $x^i$ просто как метки, то допустимы любые преобразования вида $x^i = x^i(x'^k)$. Можно, однако, наложить ограничивающие условия – потребовать, например, чтобы координаты реализовывались следующим образом: имеется "пыль", частицы которой движутся, не сталкиваясь друг с другом (но, возможно, под действием сил; скажем, частицы снабжены реактивными двигателями произвольной мощности). Каждой частице приписана пространственная метка $x^\alpha$ и на каждой из них установлены "плохие" часы, т.е. часы, идущие неравномерно. На некоторой пространственноподобной поверхности на всех часах установлено "время" $x^0=0$. Предположим, что наши частицы заполняют пространство сколь угодно плотно и когда расстояние между ними стремится к нулю, то стремится к нулю и различие в их скорости, а также различие в ходе часов. Тогда в некоторой области пространства-времени все эти частицы образуют систему отсчета: событию, совпадающему по месту с пылинкой $x^1, x^2, x^3$, в момент времени $x^0$ по ее часам приписываются эти координаты.

Метрика, связанная с такой системой отсчета, должна удовлетворять дополнительным условиям. Очевидно, что $g_{00} > 0$ (в противном случае нельзя было бы определить собственное время по часам на пылинке) и форма $g_{\alpha\beta}$, описывающая метрику произвольной поверхности $x^0 = const$, должна иметь ранг 3 и сигнатуру –3, т.е. должна быть пространственноподобной.

Заметим, что в реальной Вселенной пространство-время в целом искривленное и его геометрия риманова. На бесконечности метрика реального мира не переходит в метрику Минковского. Когда в реальном мире вводят системы отсчета с метрикой Минковского на бесконечности, то это всегда локально инерциальные системы. Так, занимаясь механикой планетных систем, вводят систему отсчета, связанную с центром массы Солнца, и рассматривают ее как инерциальную, т.е. на бесконечности описываемую метрикой Минковского (в рамках ньютоновской механики такая система галилеева, т.е. метрика трехмерного пространства евклидова и время абсолютно). На самом же деле система, связанная с Солнцем, "падает" в поле Галактики и уйти на бесконечность нельзя: такая система является только локально инерциальной. Можно построить идущую вверх и вниз иерархию систем отсчета (спутник Земли, Земля, Солнечная система, Галактика и т.д.). Заметим, что здесь имеется одна тонкость: с точки зрения механики Ньютона система, связанная с Солнцем, инерциальна с учетом поля тяготения Солнца, так как тяготение есть обычная сила (его действие, скажем, часто можно не учитывать), с точки же зрения частной ТО и ОТО тяготение Солнца нарушает инерциальность системы Солнца вблизи него. Чтобы избавиться от поля Солнца, нужно уйти от него достаточно далеко. При этом система отсчета может все еще быть малой по сравнению с характерным масштабом неоднородности поля Галактики: с точки зрения наблюдателя в Галактике это маленькая система типа $L$. Заметим, что такую иерархию систем отсчета нельзя продолжать дальше галактических скоплений – мы придем ко Вселенной в целом, четырехмерная геометрия которой уже принципиально неевклидова. Если воспользоваться двумерной аналогией, то четырехмерная геометрия Вселенной в целом похожа на двумерную геометрию сдутого, сморщенного мяча или неровной дыни. Только локально, выбирая малые участки, можно применять евклидову геометрию. Отдельные массивные тела (звезды, планеты) порождают как бы местные вздутия. $L$-системы либо подгоняются под маленький кусочек пространства, либо "обходят" какие-то местные вздутия (плоские на "бесконечности" системы).

### 1.3. Уравнение движения материальной точки

Получим теперь уравнение движения материальной точки в ГП, воспользовавшись для этого ПЭ. В частной ТО справедливо утверждение, что для траектории свободной материальной точки между какими-то точками A, B

$$\delta \int_A^B ds = 0 . \qquad (3)$$

В силу ПЭ законы частной ТО справедливы в любой $L$-системе. Но так как интервал $ds$ определен в любой системе отсчета (см. (2)), то (3) справедливо и в ОТО.