не переходит в метрику Минковского. Когда в реальном мире вводят системы отсчета с метрикой Минковского на бесконечности, то это всегда локально инерциальные системы. Так, занимаясь механикой планетных систем, вводят систему отсчета, связанную с центром массы Солнца, и рассматривают ее как инерциальную, т.е. на бесконечности описываемую метрикой Минковского (в рамках ньютоновской механики такая система галилеева, т.е. метрика трехмерного пространства евклидова и время абсолютно). На самом же деле система, связанная с Солнцем, "падает" в поле Галактики и уйти на бесконечность нельзя: такая система является только локально инерциальной. Можно построить идущую вверх и вниз иерархию систем отсчета (спутник Земли, Земля, Солнечная система, Галактика и т.д.). Заметим, что здесь имеется одна тонкость: с точки зрения механики Ньютона система, связанная с Солнцем, инерциальна с учетом поля тяготения Солнца, так как тяготение есть обычная сила (его действие, скажем, часто можно не учитывать), с точки же зрения частной ТО и ОТО тяготение Солнца нарушает инерциальность системы Солнца вблизи него. Чтобы избавиться от поля Солнца, нужно уйти от него достаточно далеко. При этом система отсчета может все еще быть малой по сравнению с характерным масштабом неоднородности поля Галактики: с точки зрения наблюдателя в Галактике это маленькая система типа L. Заметим, что такую иерархию систем отсчета нельзя продолжать дальше галактических скоплений – мы придем ко Вселенной в целом, четырехмерная геометрия которой уже принципиально неевклидова. Если воспользоваться двумерной аналогией, то четырехмерная геометрия Вселенной в целом похожа на двумерную геометрию сдутого, сморщенного мяча или неровной дыни. Только локально, выбирая малые участки, можно применять евклидову геометрию. Отдельные массивные тела (звезды, планеты) порождают как бы местные вздутия. L-системы либо подгоняются под маленький кусочек пространства, либо "обходят" какие-то местные вздутия (плоские на "бесконечности" системы).

1.3. Уравнение движения материальной точки

Получим теперь уравнение движения материальной точки в ГП, воспользовавшись для этого ПЭ. В частной ТО справедливо утверждение, что для траектории свободной материальной точки между какими-то точками A, B

$$\delta \int_A^B ds = 0 \quad . \tag{3}$$

В силу ПЭ законы частной ТО справедливы в любой L-системе. Но так как интервал ds определен в любой системе отсчета (см. (2)), то (3) справедливо и в ОТО.

Варьируемый интеграл можно записать в виде

$$\int_A^B \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}}\,ds\ .$$

При этом на реальной траектории

$$\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}} = 1\,.$$

На этой траектории s можно рассматривать как параметр, считая, что $x^i = x^i(s)$. Этот же параметр будет использоваться и на варьируемой траектории: $x'(s) = x(s) + \delta x(s)$. Тогда

$$\delta\int_A^B ds = \int_A^B \frac{\delta\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right)}{2\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}}}\,ds = 0\,.$$

Так как

$$\int_A^B \delta\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right)ds = \int_A^B\left(\delta g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + g_{mk}\frac{d\delta x^m}{ds}\frac{dx^k}{ds} + g_{im}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^m}{ds}\right)ds = 0,$$

то, интегрируя по частям с учетом того что $\delta x^i_A = \delta x^i_B = 0$, находим:

$$\int_A^B\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - g_{mn}\frac{d^2x^n}{ds^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - g_{mn}\frac{d^2x^n}{ds^2}\right)\delta x^m ds = 0\,.$$

Так как вариация δx^m произвольна, то отсюда получаются уравнения движения $(u^i = dx^i/ds)$:

$$\frac{du_m}{ds} = g_{mn}\frac{d^2x^n}{ds^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)u^i u^k\ .$$

Введем тензор g^{ik}, определяемый тем, что

$$g^{il} g_{lk} = \delta^i_k \qquad (4)$$

Тогда, обозначив

$$\Gamma_{m,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right), \quad \Gamma^m_{ik} = g^{mn}\Gamma_{n,ik}, \tag{5}$$

можно записать уравнения движения в виде

$$\frac{du^m}{ds} = -\Gamma^m_{ik} u^i u^k . \tag{6}$$

Величины Γ^m_{ik} называются символами Кристоффеля. Уравнение (6) и есть первое из уравнений ОТО – уравнение движения материальной точки в гравитационном поле.

Для лучей света из ПЭ следует, что

$$ds = 0 . \tag{7}$$

Поэтому уравнение (6) непримеиимо. Эту трудность легко преодолеть, используя для определения траекторий лучей света само уравнение (7) вместе с принципом Гюйгенса, который эквивалентен вариационному принципу.

Уравнение (6), которое можно записать в виде

$$\frac{d^2x^m}{ds^2} + \Gamma^m_{ik} u^i u^k = 0 , \tag{6'}$$

получено из условия (3) и поэтому есть не что иное, как уравнение кратчайшей линии (геодезической) в римановом пространстве с метрикой (2). При выводе уравнения нигде не фигурировало число измерений пространства, поэтому (6') справедливо при произвольном числе измерений n ($i=1, 2, ..., n$).

Здесь и далее будут рассматриваться чисто математические вопросы в пространстве с римановой геометрией n измерений, причем для простоты будет считаться, что сигнатура формы g_{ik} равна n. Пространство с $g_{ik}=const$ и произвольной сигнатурой s ($-n \leq s < n$) называется псевдоевклидовым. Метрика ОТО локально псевдоевклидова. Не составит труда заменить в нужных местах в формулах $\delta_{ik} = diag$ (1, 1, 1, ..., 1) на тензор Минковского $\eta_{ik} = diag$ (1, –1, –1, –1).

Покажем теперь, что в окрестности каждой точки риманова пространства n измерений можно ввести систему координат, в которой

$$g_{ik} = \delta_{ik}, \quad \Gamma^m_{ik} = 0, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} = 0 . \tag{8}$$

Действительно, приведение g_{ik} к виду δ_{ik} соответствует приведению формы к главным осям (решение этой задачи хорошо известно). После того как это сделано, в данной точке P уже имеется евклидова метрика и можно определить углы. Новые оси задают тогда n ортогональных направлений. Пусть P' – точка в окрестности P. Проведем геодезическую PP', которая образует с осями в точке P углы, косинусы которых равны α^i. Введем координаты точки P', которые принято называть нормальными, определив их соотношениями $x^i(P')=\alpha^i s$, где s – расстояние PP'. Из уравнения (6) следует, что $\Gamma^m_{ik}\alpha^i\alpha^k=0$ в любой точке данной геодезической. Устремляя P' к P и учитывая, что P' можно выбрать так, что α^i будут любыми, получаем $\Gamma^m_{ik}(P)=0$, что и требовалось доказать. Отсюда же следует, что все $\partial g_{ik}/\partial x^m=0$. Действительно, если все $\Gamma^m_{ik}=0$, то и $\Gamma_{m,ik}=0$. Используя явные выражения для $\Gamma_{m,ik}$ (5), находим:

$$\Gamma_{m,ik}+\Gamma_{k,im}=\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}=0 \quad .$$

Таким образом, доказано, что в любом римановом пространстве существуют локальные системы координат, которые локально евклидовы в том смысле, что в данной точке P $g_{ik}=\delta_{ik}$, $\Gamma^m_{ik}=0$, причем первое соотношение справедливо с точностью $O(\Delta x^i)$. Очевидно, что нормальная система не единственно возможная. Любая система, где справедливо (8), называется геодезической. В любой геодезической системе сами геодезические имеют в точке P вид прямых:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}=0 \quad . \tag{9}$$

В пространстве-времени геодезическим системам отсчета соответствуют свободно падающие системы, в которых согласно ПЭ метрика является метрикой Минковского, т.е. L-системы. Уравнение (9) выражает тогда закон инерции Ньютона.

Итак, можно сделать следующие выводы.

1. Гравитация делает четырехмерную геометрию нашего мира неевклидовой. В области, где имеется ГП, нельзя построить ни одной системы отсчета, где была бы справедлива метрика Минковского во всем пространстве. Необходимо использовать метрику Римана.

2. Существуют L-системы, в которых локально справедливы законы частной ТО, причем в таких системах $ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$.

3. Из предыдущего пункта следует, что для произвольной системы координат $ds^2=g_{ik}(x)\,dx^i dx^k$.

4. Из пп. 2, 3 следует, что уравнение движения материальной точки имеет вид (6) с обозначениями, введенными в (5).

5. В римановом пространстве размерности 4 и сигнатуры –2 имеются такие системы координат, где в окрестности данной точки $g_{ik}=\eta_{ik}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ и все 40 величин $\Gamma^m_{ik}=0$. Эти системы отсчета мы отождествляем с L-системами. В таких системах внешнее ГП исчезает в некотором малом объеме пространства-времени. Существование таких систем отсчета есть выражение ПЭ.