1.4. Ньютоновское приближение

Для того чтобы извлечь физически интересные следствия из уравнений движения (6), надо знать ГП, т.е. величины $g_{ik}(x)$. Для этого нужно иметь уравнения, аналогичные уравнениям Максвелла, определяющие поле $g_{ik}(x)$ при заданных источниках, и знать решение этих уравнений. Пока что ограничимся тем, что найдем ньютоновское приближение для уравнений движения, которому соответствуют медленные $(v \ll 1)$ движения в слабом поле. Последнее требование означает, что в подходящем классе координатных систем можно записать g_{ik} в виде

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad |h_{ik}| \ll 1 . \tag{10}$$

Кроме того, предположим, что поле медленно меняется во времени, т.е.

$$\left|\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}\right| \ll \left|\frac{\partial h_{lm}}{\partial x^\alpha}\right| \tag{11}$$

для всех i, k, l, m. Тогда уравнение (6') можно переписать в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\Gamma^\alpha_{00} ,$$

так как $u^0 = \dfrac{dt}{ds} \simeq 1$, $u^\alpha \simeq v^\alpha \ll 1$, $ds \approx dt$.

Учитывая, что $g^{ik} \approx g_{ik} \simeq \eta_{ik}$, имеем:

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\Gamma_{\alpha,00} = -\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right)$$

и в силу (11) окончательно:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} .$$

Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} .$$

Сравним это с уравнением Ньютона

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} ,$$

где φ – потенциал ГП. Очевидно, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} .$$

Условие на бесконечности требует обращения потенциала φ в нуль и g_{00} в 1: $\varphi \to 0$, $g_{00} \to 1$ при $|x^\alpha| \to \infty$. Поэтому

$$g_{00} = 1 + 2\varphi \;. \qquad (12)$$

Так как значение $g_{00} = 1$ соответствует метрике Минковского, которая, конечно, реализуется вдали от тел, создающих ГП, причем все $g_{ik} = \eta_{ik}$, то потенциал φ характеризует отклонение метрики от плоской. Того же масштаба оказываются и остальные компоненты h_{ik} в (10).

1.5. Масштаб эффектов ОТО

Итак, в слабых полях всегда можно выбрать координаты так, что $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$ и все $h_{ik} \sim \varphi$. Гравитационный потенциал φ будет характеризовать отклонение метрики пространства-времени от метрики Минковского.

Рассмотрим какие значения имеет величина φ в астрономии. Потенциал φ в системе единиц, где $c = 1$, связан с потенциалом в системе СГСЭ равенством

$$(\varphi)_{c=1} = \left(\frac{\varphi}{c^2}\right)_{СГСЭ} \;.$$

Напомним, что энергия гравитационного взаимодействия двух масс

$$\mathcal{E} = -\frac{GmM}{r} \;, \qquad (13)$$

где G — ньютоновская постоянная. Для перехода к системе $c = 1$ нужно поделить φ на c^2. Из формулы (13) следует, что отношение $\frac{\mathcal{E}}{mc^2} = -\frac{GM}{rc^2} = \frac{\varphi}{c^2}$ есть безразмерная величина. Таким образом,

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} = 1 - \frac{r_g}{r} \;, \qquad (14)$$

где величина

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \qquad (15)$$

носит название гравитационного радиуса тела массой M. Можно ввести систему единиц, в которой не только $c = 1$, но и $G = 1$. В такой системе единиц $r_g = 2M$.

Величина r_g определяет, так сказать, масштаб "вздутия", которое тело образовало в пространстве-времени. На бесконечности в силу краевых условий метрика, порождаемая массивным телом, стремится к η_{ik} и пространство-время становится псевдоевклидовым. Если мы находимся в области около вздутия, на расстоянии порядка r от массивного тела, то безразмерный параметр,