2. ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

2.1. Метрика риманова пространства

Для того чтобы изучать физические явления в рамках ОТО и, прежде всего, само тяготение, нужно использовать геометрию риманова пространства. В этой главе мы подробнее рассмотрим математические вопросы, связанные с римановой геометрией.

Метрика пространства в случае n измерений имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}(x)\,dx^i dx^k \quad , \quad i,k = 1,2,\ldots,n \; . \tag{16}$$

При этом, как отмечалось в разд. 1, пространство является римановым, если, во-первых, квадрат расстояния между двумя близкими точками задается однородной квадратичной формой дифференциалов координат с коэффициентами, зависящими от точки, и, во-вторых, метрика локально евклидова, т.е. в любой данной точке можно подходящим преобразованием привести g_{ik} к виду δ_{ik}.

Предполагается, что в каждой точке риманова пространства определено отнесенное к ней пространство векторов $\vec{A}$ с компонентами A^i и что с этими векторами можно проделывать обычные операции: вычислять их длины, углы между векторами и т.д. Все это основано на том, что по определению скалярное произведение двух векторов равно

$$(AB) = g_{ik} A^i B^k \quad , \tag{17}$$

в частности, $A^2 = (AA) = g_{ik} A^i A^k$. Величины A^i называются контравариантными компонентами вектора $\vec{A}$.

Рассмотрим геометрический смысл g_{ik}. Введем вектор, соединяющий две близкие точки $P(x^i)$ и $P'(x^i + dx^i)$, и назовем этот вектор $d\vec{r}$. По определению

$$d\vec{r} = \vec{e}_k \; dx^k \quad , \tag{18}$$

где $\vec{e}_k$ – векторы, касательные к координатным линиям, проходящим через точку P. Грубо говоря, это отрезки таких линий, соответствующие $dx^k = 1$. Строгое же определение дается формулой (18). Тогда $(d\vec{r})^2 = ds^2 = (\vec{e}_k \vec{e}_m) \times$ $\times dx^k dx^m$. Таким образом, видно, что

$$g_{km} = \vec{e}_k \vec{e}_m \; . \tag{19}$$

В римановом пространстве в области вблизи точки $P(x^1, \ldots, x^n)$ линии, получающиеся, когда все x^i кроме x^k $(k \neq i)$ фиксированы, а x^k меняется, образуют косоугольную систему координат. Пусть теперь вводятся новые координаты $(x')^k = f^k(x^1, \dots, x^n)$, тогда в окрестности точки P они определяют новую косоугольную систему координат с "осью" r, соответствующей меняющейся координате $(x')^r$ и постоянным остальным координатам $(x')^i$, $i \neq r$. Для малого вектора, соединяющего две близкие точки P и P$'$, компоненты по новым осям равны

$$(dx')^r = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} dx^k \quad . \tag{20}$$

Эта формула определяет закон преобразования дифференциалов координат. С другой стороны, формула (18) определяет разложение вектора $d\vec{r}$ по базису $\vec{e}_k$ через дифференциалы координат. Аналогично, контравариантные компоненты A^i вектора $\vec{A}$ определены тем, что они задают разложение по базису $\vec{e}_i$ $(\vec{A} = \vec{e}_i A^i)$ и закон преобразования контравариантных компонент вектора $\vec{A}$ совпадает с (20), т.е.

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k \quad . \tag{21}$$

Можно ввести ковариантные компоненты, определив их как

$$A_i = g_{ik} A^k \quad . \tag{22}$$

Из определения длины вектора следует, что $A^2 = A_i A^i$ и, аналогично, скалярное произведение

$$(AB) = A_i B^i \quad . \tag{23}$$

Так как скалярное произведение инвариантно относительно преобразования координат, то

$$A'_i = A_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \quad . \tag{24}$$

Очевидно, как надо ввести закон преобразования для тензоров произвольного ранга $T^{(p)}_{(q)} = T^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}$. Например, для смешанного тензора второго ранга

$$T'^i_k = T^m_n \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \quad .$$

Теперь, используя инвариантность ds^2, можно доказать, что наше обозначение для g_{ik} соответствует его тензорной природе: g_{ik} есть ковариантный тензор второго ранга (метрический тензор).

Наконец, из линейной алгебры хорошо известно, что объем, построенный на векторах $a_1, \dots, a_n$ в пространстве любого числа измерений, выражается через определитель Грамма: $V = \sqrt{\det|a_i a_k|}$. Тогда из формул (18) и (19) следует, что объем n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $(dx^1, 0, \dots, 0)$, $(0, dx^2, \dots, 0)$ и т.д., равен

$$\sqrt{\det |g_{ik}|}\ dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad . \tag{25}$$

Входящий сюда радикал обозначают просто $\sqrt{g}$. Такое выражение годится при сигнатуре, равной n . В случае ОТО, для того чтобы корень был вещественным используют $\sqrt{-g}$.

2.2. Параллельный перенос

Как отличить риманово пространство от плоского? В евклидовом пространстве можно перенести вектор в любую точку, сохраняя его направление. Такая операция называется параллельным переносом. Результат параллельного переноса в этом случае не зависит от пути. В римановом пространстве это уже не так: операцию параллельного переноса можно определить, но она однозначна только в малом, а в большом результат зависит от пути. Мера этой неоднозначности характеризует искривление пространства, отличие его от плоского. В теории Эйнштейна соответствующее искривление пространства-времени непосредственно связано с полем тяготения.

Прежде чем рассмотреть n-мерный случай, возьмем наглядный пример – поверхность сферы, отвечающую $n = 2$ (рис. 1). Проведем в точке P

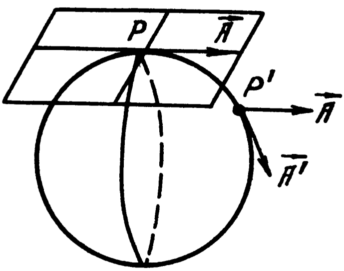

Рис. 1

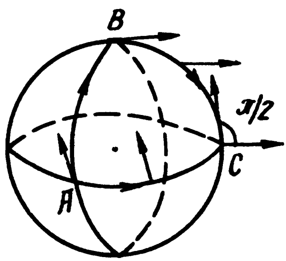

Рис. 2

плоскость, касательную к сфере. Пусть в этой плоскости находится вектор $\vec{A}$. Такой вектор будем называть вектором, лежащим на сфере. Это есть определение, но если вектор мал по длине, то "физически" он действительно на ней лежит. Если параллельно перенести вектор $\vec{A}$ в точку P$'$ в евклидовом пространстве, то он уже не будет лежать в плоскости, касательной к сфере в точке P$'$. Необходимо вернуть его на сферу, в касательную плоскость. Определим