и (19) следует, что объем n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $(dx^1, 0, \ldots, 0)$, $(0, dx^2, \ldots, 0)$ и т.д., равен

$$\sqrt{\det |g_{ik}|}\; dx^1 dx^2 \ldots dx^n \quad . \tag{25}$$

Входящий сюда радикал обозначают просто $\sqrt{g}$. Такое выражение годится при сигнатуре, равной n. В случае ОТО, для того чтобы корень был вещественным используют $\sqrt{-g}$.

2.2. Параллельный перенос

Как отличить риманово пространство от плоского? В евклидовом пространстве можно перенести вектор в любую точку, сохраняя его направление. Такая операция называется параллельным переносом. Результат параллельного переноса в этом случае не зависит от пути. В римановом пространстве это уже не так: операцию параллельного переноса можно определить, но она однозначна только в малом, а в большом результат зависит от пути. Мера этой неоднозначности характеризует искривление пространства, отличие его от плоского. В теории Эйнштейна соответствующее искривление пространства-времени непосредственно связано с полем тяготения.

Прежде чем рассмотреть n-мерный случай, возьмем наглядный пример – поверхность сферы, отвечающую $n = 2$ (рис. 1). Проведем в точке P

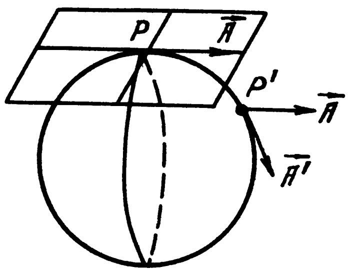

Рис. 1

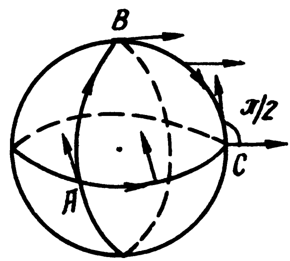

Рис. 2

плоскость, касательную к сфере. Пусть в этой плоскости находится вектор $\vec{A}$. Такой вектор будем называть вектором, лежащим на сфере. Это есть определение, но если вектор мал по длине, то "физически" он действительно на ней лежит. Если параллельно перенести вектор $\vec{A}$ в точку P$'$ в евклидовом пространстве, то он уже не будет лежать в плоскости, касательной к сфере в точке P$'$. Необходимо вернуть его на сферу, в касательную плоскость. Определим операцию параллельного переноса вектора на сфере следующим образом. Перенесем вектор $\vec{A}$ параллельно на бесконечно малое расстояние δl, а затем спроектируем его на касательную плоскость в новой точке. Изменение длины вектора $\vec{A}$ будет при этом $\sim\delta l^2$, т.е. второго порядка малости. Перенос на конечное расстояние по заданной линии на сфере определим как последовательность бесконечно малых переносов вдоль элементов линии. При этом длина сохраняется с точностью до малых второго порядка.

Ясно, что при таком определении параллельный перенос по двум разным путям дает разные результаты. Например, вектор, перенесенный по линии АВС (рис. 2), окажется повернутым на угол $\pi/2$ относительно того же вектора, перенесенного по линии АС. Удобной характеристикой неевклидовости поверхности является поворот вектора при обносе по замкнутому контуру. Например, при переносе по АВСА поворот равен $\pi/2$.

Для любой поверхности угол поворота вектора при обносе любого замкнутого контура на поверхности можно представить в виде интеграла по площади, охватываемой контуром:

$$\delta\varphi = \int_S K(P)\,dS \quad . \tag{26}$$

Величина $K(P)$ называется гауссовой кривизной поверхности. На сфере все точки равноправны, следовательно, $K(P) = K$ не зависит от Р. Для контура на рис. 2 $\delta\varphi = K\cdot S = \frac{\pi}{2}$, $S = \frac{\pi R^2}{2}$ и $K = \frac{1}{R^2}$. Если обобщить это понятие на случай n измерений, то мы придем к понятию тензора Римана. Он и будет основным инструментом для исследования поля тяготения.

Рассмотрим, как меняются компоненты вектора при параллельном переносе на двумерной поверхности. Пусть на поверхности задана произвольная координатная сетка x^i, $i = 1, 2$, так что каждой точке Р соответствуют координаты x^1, x^2. Тогда в каждой точке Р заданы два вектора $\vec{r}_i = d\vec{r}/dx^i$, лежащие в касательной плоскости в точке Р. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный в точку Р из произвольной фиксированной точки О объемлющего трехмерного евклидового пространства. Очевидно, что $\vec{r}_i$ есть базисные векторы двумерного пространства поверхности сферы, соответствующие векторам $\vec{e}_i$ в формуле (18).

Разложим вектор $\vec{A}(P)$ по базисным векторам: $\vec{A}(P) = A^i\vec{r}_i$. Перенесем теперь $\vec{A}$ в точку P'. Тогда $\vec{A}(P') = A^i(P)\vec{r}_i(P) - \vec{A}_\perp(P')$, где $\vec{A}_\perp(P') = (\vec{A}(P)\vec{n}(P'))\times$ $\times\vec{n}(P')$, $\vec{n}(P')$ – вектор, нормальный к поверхности в точке P'.

Введем в касательной плоскости в точке Р векторы $\vec{r}^k$, определяемые условием $\vec{r}_i\vec{r}^k = \delta_i^k$. Тогда

$$\vec{r}^i = g^{ik}\vec{r}_k \quad , \quad \vec{r}_k = g_{ki}\vec{r}^i \, , \quad (\vec{r}_i\,\vec{r}_k) = g_{ik} \quad ,$$

$$(\vec{r}^l\vec{r}^m) = g^{lm} \, , \quad g_{ik}\,g^{km} = \vec{r}_i\,\vec{r}^m = \delta_i^m \quad .$$

Если умножить $\vec{A}(P)=A^i\vec{r}_i$ на $\vec{r}^k$, то $A^k(P)=\vec{r}^k(P)\vec{A}(P)$.
Отсюда

$$\tilde{\vec{A}}(P')\vec{r}^k(P')=(A^i(P)\vec{r}_i(P))\vec{r}^k(P')=\tilde{A}^k(P');$$

$$\delta A^i=\tilde{A}^i(P')-A^i(P)=(A^k(P)\vec{r}_k(P))\vec{r}^i(P')-\vec{A}(P)\vec{r}^i(P)=(d\vec{r}^i\vec{r}_k)A^k(P).$$

Для изменения компонент вектора $\vec{A}$ при параллельном переносе на поверхности получаем формулу

$$\delta A^i=(d\vec{r}^i\,\vec{r}_k)A^k \quad . \tag{27}$$

Преобразуем ее, учитывая, что $(\vec{r}^i\vec{r}_k)=\delta^i_k$; $d\vec{r}^i\vec{r}_k+\vec{r}^i d\vec{r}_k=0$. Тогда

$$\delta A^i=-(\vec{r}^i d\vec{r}_k)A^k=-g^{il}(\vec{r}_l\,d\vec{r}_k)A^k=-g^{il}(\vec{r}_l\,\vec{r}_{km})A^k dx^m \quad ,$$

где введено обозначение

$$\vec{r}_{i\ldots m}=\frac{\partial^{\cdots}\vec{r}}{\partial x^i\ldots\partial x^m} \quad .$$

Таким образом, окончательно, изменение компоненты вектора при параллельном переносе дается формулой

$$\delta A^i=-g^{il}(\vec{r}_l\,\vec{r}_{km})A^k dx^m \quad . \tag{28}$$

Теперь удостоверимся, что таким образом определенная операция параллельного переноса зависит только от внутренних свойств поверхности (от ее метрики). Действительно, так как $(\vec{r}_i\vec{r}_k)=g_{ik}$, $\vec{r}_{ik}=\vec{r}_{ki}$ и т.д., получаем следующие равенства:

$$(\vec{r}_l\,\vec{r}_{km})+(\vec{r}_{lm}\vec{r}_k)=\partial g_{lk}/\partial x^m \quad ,$$

$$(\vec{r}_l\,\vec{r}_{mk})+(\vec{r}_{lk}\,\vec{r}_m)=\partial g_{lm}/\partial x^k \quad ,$$

$$(\vec{r}_k\,\vec{r}_{ml})+(\vec{r}_{kl}\,\vec{r}_m)=\partial g_{km}/\partial x^l \quad ,$$

откуда $(\vec{r}_l\,\vec{r}_{km})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\dfrac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\dfrac{\partial g_{km}}{\partial x^l}\right)$.

Полученное здесь выражение уже появлялось, оно входило в уравнения для геодезической (6) и было названо символами Кристоффеля $\Gamma_{l,km}$. Итак, $(\vec{r}_l\vec{r}_{km})=$ $=\Gamma_{l,km}$ и

$$\delta A^i=-\Gamma^i_{km}A^k dx^m \quad , \tag{29}$$

где, как и раньше, введены величины $\Gamma^i_{km} = g^{il}\Gamma_{l,km}$, которые также называются символами Кристоффеля. Очевидно, что $\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$. Параллельный перенос есть линейное отображение векторов, данных в точке P, в векторы в точке P$'$, поэтому величины Γ^i_{km} называются также коэффициентами аффинной связности.

Мы показали, как изменяются векторы при параллельном переносе на двумерной поверхности. Результат зависит только от метрической формы g_{ik}, которая сама зависит только от внутренних свойств поверхности. Смысл этого утверждения заключается в том, что если поверхность изгибать без растяжения и сдвига, так, чтобы координаты точек и величины ds и g_{ik} не менялись, то закон изменения компонент вектора при параллельном переносе не меняется. Это нетривиально: первоначальное определение существенно использовало внешнее пространство. Обнаруженный здесь факт означает, конечно, что есть чисто "внутренние" свойства операции параллельного переноса, которые однозначно ее определяют и которые мы должны понять. Одновременно мы видим, что геодезическую можно определить не только как кратчайшее расстояние между двумя точками, но и как получаемую параллельным переносом касательной вдоль самой себя (подробнее об этом ниже).

Определим теперь параллельный перенос в n-мерном пространстве. Можно действовать способом Леви–Чивита, который предложил вложить риманово пространство в евклидово пространство с достаточно большим числом измерений (легко показать, что это число равно $\frac{1}{2}n(n+1)$). После этого можно сделать все так же, как для двумерной поверхности, т.е. перенести вектор параллельно самому себе в объемлющем евклидовом пространстве, а потом спроектировать его в исходное пространство. Результат не зависит от способа вложения.

Более поучительна конструкция Вейля, исходящая непосредственно из свойств самого риманова пространства. Предположим, что параллельный перенос удовлетворяет следующим аксиомам.

1. $\delta A^i = -\Gamma^i_{km} A^k dx^m$.
2. $\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$.
3. Длины векторов не меняются при параллельном переносе.

Обсудим смысл этих аксиом. Аксиома 1 утверждает, что δA^i линейно по A^k (свойство линейности (аффинности) преобразования) и по dx^m, что очень естественно. Нетривиальна аксиома 2 – требование симметрии коэффициентов преобразования. Действительно, на первый взгляд индексы k и m имеют совершенно разный смысл. На самом деле вполне можно рассматривать пространства и изучать геометрии, где $\Gamma^i_{km} \neq \Gamma^i_{mk}$ – так называемые пространства с кручением. Но в таких пространствах параллельный перенос приводит к повороту, даже если метрика евклидова, что реально не наблюдается. Именно эту возможность и исключает аксиома. Аксиома 3 тоже естественна физически. Отказ от нее означал бы, что стандартный интервал изменяется при переносе или что мы отказываемся от наглядной физической интерпретации операции параллельного переноса. С математической точки зрения все это вполне возможно, такую геометрию рассматривал, в частности, Вейль. При этом получается, что собственные частоты одинаковых атомов, соответствующие времениподобным интервалам ds, вообще говоря, не совпадают, если у них были разные "биографии" (разные пути в четырехмерном пространстве). Это, с наблюдаемой точностью, противоречит опыту.

Аксиому 3 можно записать как условие:

$$g_{ik}(P)A^i(P)A^k(P)=g_{ik}(P')\tilde{A}^i(P')\tilde{A}^k(P');\ \delta(g_{ik}A^iA^k)=0.$$

Здесь $\tilde{A}^i(P')$ – компоненты вектора $\vec{A}(P)$ после переноса в P′. Подставляя условие аксиомы 1, получим:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}A^iA^k dx^m-g_{lk}\Gamma^l_{im}A^i dx^m A^k-g_{il}A^i\Gamma^l_{km}A^k dx^m=0$$

или

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}=\Gamma_{k,im}+\Gamma_{i,km}. \tag{30}$$

Аналогично

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}=\Gamma_{i,mk}+\Gamma_{m,ik};\qquad \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l}=\Gamma_{k,mi}+\Gamma_{m,ki}. \tag{31}$$

Тогда из (30) и (31) следует, что в n-мерном пространстве справедливы те же формулы для Γ^i_{kl}, что и в двумерном случае, и что Γ^i_{kl} совпадают с символами Кристоффеля, входящими в уравнение для геодезической (6). Именно поэтому мы с самого начала при формулировке аксиом 1–3 ввели те же обозначения, что и раньше.

Вейль предложил заменить аксиомы 1 и 2 на аксиому, которую он считал более прозрачной – в действительности, она есть математический аналог принципа эквивалентности. Согласно этой аксиоме постулируется существование в любой точке такой системы координат, для которой компоненты вектора не меняются при параллельном переносе и $g_{ik}=\delta_{ik}$. Подчеркнем, что существование такой системы не вытекает из доказанного ранее существования нормальных координат, для которых $\partial g_{ik}/\partial x^l=0$, так как связь этих величин с параллельным переносом пока неизвестна. Легко увидеть, что аксиомы 1 и 2 сразу следуют из этой аксиомы. Действительно, получим формулы для Γ^i_{kl} в произвольной системе координат, исходя из того, что в некоторой системе, которую будем называть евклидовой (Е-системой), $g_{ik}=\delta_{ik}$. Пусть величина в Е-системе имеет индекс Е. Поскольку по определению $\tilde{A}^i_E(P')=A^i_E(P)$, то

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x_E^k}\Big|_P A_E^k , \qquad \tilde{A}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x_E^k}\Big|_{P'} A_E^k .$$

Отсюда

$$\delta A^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x_E^k \partial x_E^m}\Big|_P dx_E^m A_E^k = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x_E^k \partial x_E^m} \frac{\partial x_E^m}{\partial x^r} \frac{\partial x_E^k}{\partial x^l} dx^r A^l = -\tilde{\Gamma}_{rl}^i dx^r A^l. \qquad (32)$$

Это доказывает, что изменение вектора $\vec{A}$ при переносе определяется тем же выражением, что и в аксиоме 1, и $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ симметричны. Таким образом, из нового постулата получены аксиомы 1–3 и, следовательно, выражения для Γ_{kl}^i через метрическую форму.

Формула (32) устанавливает выражение для символов Кристоффеля Γ_{kl}^i через производные координат по евклидовым координатам x_E^i. Определим связь между координатами x^i в произвольной системе и евклидовыми координатами x_E^i. Предположим, что в данной точке P $x^i(P)=0$, $x_E^i(P)=0$. Считается, что метрика в окрестности точки P приведена к евклидовому виду, т.е. $g_{ik}(P)=\delta_{ik}$. Тогда

$$\frac{\partial x_E^k}{\partial x^m} = \delta_m^k , \qquad \Gamma_{lm}^i = -\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^l \partial x^m} .$$

Отсюда, с учетом начального условия, получаем:

$$x^i = x_E^i - \frac{1}{2}\Gamma_{lm}^i x_E^l x_E^m \qquad (33)$$

или, наоборот,

$$x_E^i = x^i + \frac{1}{2}\Gamma_{lm}^i x^l x^m . \qquad (34)$$

Сделаем некоторые замечания, относящиеся к процессу вывода формул для параллельного переноса. При получении выражения (30) мы пришли к равенству $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - \Gamma_{i,km} - \Gamma_{k,im}\right)A^i A^k = 0$, сделав далее заключение (не высказанное явно) о том, что если это равенство справедливо для произвольных A^i, то выражение в скобках равно нулю. Утверждения такого рода носят название теорем о частном (Эддингтон [5]). Так, первая теорема утверждает: если $T_i A^i = 0$ для всех A^i, то $T_i = 0$. Доказательство очевидно: выберем $A^i = \delta_k^i$, тогда $T_k = 0$. Аналогично, вторая теорема утверждает: если $T_{ik}A^i A^k = 0$ для всех A^i и $T_{ik} = T_{ki}$, то все $T_{ik} = 0$. Для доказательства выберем $A^i = \delta_r^i$, тогда $T_{11} = T_{22} = \ldots = 0$. Возьмем, например, $A^i = (1, 1, 0, ..., 0)$. Тогда, используя условие симметрии, найдем: $T_{ik}A^i A^k = T_{11} + T_{22} + 2T_{12} = 0$ и, учитывая предыдущее равенство, получим, что $T_{12}=0$. Так как все индексы равноправны, то отсюда $T_{ik}=0$ для всех i, k.

Найдем, как меняется при параллельном переносе ковариантный вектор. Так как длина вектора (его квадрат) не меняется при этой операции, то не меняется и скалярное произведение двух векторов, т.е. $\delta(A_i B^i)=\delta A_i B^i + A_i \delta B^i = 0$. Подставляя в эту формулу закон изменения контравариантных компонент вектора при параллельном переносе (29), получим: $(\delta A_m - A_i \Gamma^i_{mk} dx^k) B^m = 0$. Отсюда в силу указанной выше первой теоремы о частном

$$\delta A_m = \Gamma^i_{mk} A_i \, dx^k . \tag{35}$$

Теперь легко указать обобщение формул параллельного переноса на произвольный тензор. Например,

$$\delta T^i_k = -\Gamma^i_{ml} T^m_k \, dx^l + \Gamma^m_{kl} T^i_m \, dx^l . \tag{36}$$

Наконец, мы определили ранее геодезическую как линию наименьшей длины в римановом пространстве и получили из этого определения уравнение (6). Покажем, что к этому же уравнению можно прийти, приняв другое, альтернативное определение: геодезическая линия есть линия, получающаяся параллельным переносом касательного вектора вдоль самого себя. Это означает следующее. Начнем параллельный перенос из точки A_1. Пусть касательный вектор есть $\vec{t}_1$. Бесконечно близкая точка A_2 получается сдвигом на δs вдоль $\vec{t}_1$. При этом касательный вектор, полученный параллельным переносом, будет равен $\vec{t}_2$; точка A_3 достигается сдвигом из A_2 на $\delta s\, \vec{t}_2$ и т.д. Вектор $u^i = dx^i/ds$ есть касательный вектор единичной длины. Исходя из приведенного выше определения геодезической, имеем по формуле (29):

$$\delta u^i = -\Gamma^i_{kl} u^k \delta s \, u^l \; ; \qquad \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = 0 .$$

Таким образом, мы снова пришли к уравнению (6), откуда следует, что старое и новое определения геодезической эквивалентны.

Заметим наконец, что величины Γ^i_{kl} не имеют тензорной природы. В L-системе (например, падающий лифт) все $\Gamma^i_{kl}=0$. Так как все тензоры преобразуются линейно при переходе из одной системы в другую, то если бы Γ^i_{kl} были тензорами, они были бы нулями в любой системе.

2.3. Понятие ковариантной производной

Рассмотрим теперь векторное поле в пространстве Римана $A^i(P)$ или $A^i(x^k)$. В теории поля необходимо иметь дифференциальные характеристики, описывающие изменение этого поля в пространстве-времени. При этом естественно желать, чтобы эти величины вели себя ковариантно при преобразовании коор-