дущее равенство, получим, что $T_{12}=0$. Так как все индексы равноправны, то отсюда $T_{ik}=0$ для всех i , k .

Найдем , как меняется при параллельном переносе ковариантный вектор. Так как длина вектора (его квадрат) не меняется при этой операции, то не меняется и скалярное произведение двух векторов, т.е. $\delta(A_i B^i)=\delta A_i B^i + A_i \delta B^i = 0$. Подставляя в эту формулу закон изменения контравариантных компонент вектора при параллельном переносе (29), получим: $(\delta A_m - A_i \Gamma^i_{mk} dx^k) B^m = 0$. Отсюда в силу указанной выше первой теоремы о частном

$$\delta A_m = \Gamma^i_{mk} A_i \, dx^k \; . \tag{35}$$

Теперь легко указать обобщение формул параллельного переноса на произвольный тензор. Например,

$$\delta T^i_k = -\Gamma^i_{ml} T^m_k \, dx^l + \Gamma^m_{kl} T^i_m \, dx^l \; . \tag{36}$$

Наконец, мы определили ранее геодезическую как линию наименьшей длины в римановом пространстве и получили из этого определения уравнение (6). Покажем, что к этому же уравнению можно прийти, приняв другое, альтернативное определение: геодезическая линия есть линия, получающаяся параллельным переносом касательного вектора вдоль самого себя. Это означает следующее. Начнем параллельный перенос из точки A_1 . Пусть касательный вектор есть $\vec{t}_1$. Бесконечно близкая точка A_2 получается сдвигом на δs вдоль $\vec{t}_1$. При этом касательный вектор, полученный параллельным переносом, будет равен $\vec{t}_2$; точка A_3 достигается сдвигом из A_2 на $\delta s \, \vec{t}_2$ и т.д. Вектор $u^i = dx^i/ds$ есть касательный вектор единичной длины. Исходя из приведенного выше определения геодезической, имеем по формуле (29):

$$\delta u^i = -\Gamma^i_{kl} u^k \delta s \, u^l \; ; \qquad \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = 0 \; .$$

Таким образом, мы снова пришли к уравнению (6), откуда следует, что старое и новое определения геодезической эквивалентны.

Заметим наконец, что величины Γ^i_{kl} не имеют тензорной природы. В L-системе (например, падающий лифт) все $\Gamma^i_{kl}=0$. Так как все тензоры преобразуются линейно при переходе из одной системы в другую, то если бы Γ^i_{kl} были тензорами, они были бы нулями в любой системе.

2.3. Понятие ковариантной производной

Рассмотрим теперь векторное поле в пространстве Римана $A^i(P)$ или $A^i(x^k)$ В теории поля необходимо иметь дифференциальные характеристики, описывающие изменение этого поля в пространстве-времени. При этом естественно желать, чтобы эти величины вели себя ковариантно при преобразовании координат, т.е. были тензорами. Это позволит написать уравнения поля в ковариантной форме , т.е. в форме, справедливой при любом выборе координат. В евклидовой геометрии, если ограничиться только ортогональными преобразованиями, можно просто использовать величины типа $\partial A^i/\partial x^k$, которые преобразуются как тензоры. Нетрудно увидеть, что в римановой геометрии это уже не так. Действительно, по определению производной

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} \sim \frac{A^i(P') - A^i(P)}{\Delta x^k} \quad ,$$

где P, P′ — две близкие точки. Но законы преобразования компонент вектора в разных точках пространства разные, так как коэффициенты в формулах (21) и (24) являются функциями координат, поэтому величина в числителе не есть вектор.

Чтобы исправить положение, надо, очевидно, чтобы оба вектора находились в одной точке, т.е. нужно совершить параллельный перенос из P в P′ . При этом $A^i(P)$ получает дополнительное приращение δA^i. Ковариантную производную можно определить как

$$\frac{DA^i}{Dx^k} = \frac{A^i(P') - [A^i(P) + \delta A^i]}{\Delta x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} A^l \; . \tag{37}$$

Для этой производной используются обозначения

$$\frac{DA^i}{Dx^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} A^l \equiv A^i_{;k} \equiv A^i_{,k} + \Gamma^i_{kl} A^l \; . \tag{38}$$

Аналогично:

$$\frac{DA_i}{Dx^k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} A_l \equiv A_{i;k} \quad . \tag{39}$$

Легко проверить прямым вычислением, что для всех l

$$\frac{Dg_{ik}}{Dx^l} = g_{ik;l} = 0 \; . \tag{40}$$

Введем теперь понятие ковариантного дифференциала

$$DA^i = \frac{DA^i}{Dx^k} dx^k \quad . \tag{41}$$

Для тензора $T^{(p)}_{(q)}$ с p верхними и q нижними индексами

$$DT^{(p)}_{(q)} = \frac{DT^{(p)}_{(q)}}{Dx^k} dx^k \quad . \tag{42}$$

Из (40) следует тогда, что

$$\mathcal{D}g_{ik}=0 \quad , \quad \mathcal{D}g^{ik}=0 \ . \tag{43}$$

Наконец, определим понятие ковариантной производной от вектора A^i вдоль линии $\frac{\mathcal{D}A^i}{\mathcal{D}s}$. Определим ее как отношение ковариантного дифференциала на отрезке PP' к расстоянию Δs. Тогда

$$\frac{\mathcal{D}A^i}{\mathcal{D}s}=\frac{\mathcal{D}A^i}{\mathcal{D}x^k}\,\frac{dx^k}{ds}=A^i_{;k}\,u^k \ . \tag{44}$$

2.4. Тензор кривизны Римана

Найдем характеристику пространства, которая указывает на его отличие от евклидового. Для этого рассмотрим параллельный перенос произвольного вектора v^i из точки А в точку С двумя путями по сторонам параллелограмма (рис. 3). Перенося v^i из А в В, получим: $v^{i\prime}=v^i-\Gamma^i_{kl}\,v^k\Delta x^l$, где $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{kl}(A)$. Символ Кристоффеля в точке В отличается от $\Gamma^i_{kl}(A)$: $\Gamma^i_{kl}(B)=$ $=\Gamma^i_{kl}+\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\Delta x^m$. Поэтому, совершая параллельный перенос вектора из В в С, получим для полного изменения вектора на пути АВС:

$$v^{i\prime\prime}=v^i-\Gamma^i_{kl}v^k\Delta x^l-\Gamma^i_{nm}v^n\delta x^m-\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}v^k\Delta x^l\delta x^m+\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}v^k\Delta x^l\delta x^m \ .$$

Если теперь перенести v^i по пути АДС, то для изменения v^i получим аналогичную формулу, но с переставленными индексами l и m:

$$v^{i\prime\prime\prime}=v^i-\Gamma^i_{km}v^k\delta x^m-\Gamma^i_{nl}v^n\Delta x^l-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}v^k\Delta x^l\delta x^m+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}v^k\Delta x^l\delta x^m \ .$$

Вычитая одно выражение из другого, найдем:

$$v^i_{ABC}-v^i_{ADC}=-\left[\left(\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right)+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}-\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right]v^k\Delta x^l\delta x^m \ . \tag{45}$$

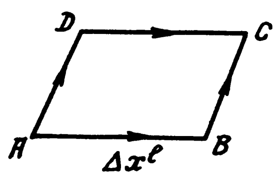

Рис. 3