Из (40) следует тогда, что

$$\mathcal{D}g_{ik}=0\ ,\quad \mathcal{D}g^{ik}=0\ . \tag{43}$$

Наконец, определим понятие ковариантной производной от вектора $A^i$ вдоль линии $\frac{\mathcal{D}A^i}{\mathcal{D}s}$. Определим ее как отношение ковариантного дифференциала на отрезке PP' к расстоянию $\Delta s$. Тогда

$$\frac{\mathcal{D}A^i}{\mathcal{D}s}=\frac{\mathcal{D}A^i}{\mathcal{D}x^k}\,\frac{dx^k}{ds}=A^i_{;k}\,u^k\ . \tag{44}$$

## 2.4. Тензор кривизны Римана

Найдем характеристику пространства, которая указывает на его отличие от евклидового. Для этого рассмотрим параллельный перенос произвольного вектора $v^i$ из точки А в точку С двумя путями по сторонам параллелограмма (рис. 3). Перенося $v^i$ из А в В, получим: $v^{i\prime}=v^i-\Gamma^i_{kl}\,v^k\Delta x^l$, где $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{kl}(A)$. Символ Кристоффеля в точке В отличается от $\Gamma^i_{kl}(A)$: $\Gamma^i_{kl}(B)=\Gamma^i_{kl}+\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\Delta x^m$. Поэтому, совершая параллельный перенос вектора из В в С, получим для полного изменения вектора на пути АВС:

$$v^{i\prime\prime}=v^i-\Gamma^i_{kl}v^k\Delta x^l-\Gamma^i_{nm}v^n\delta x^m-\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}v^k\Delta x^l\delta x^m+\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}v^k\Delta x^l\delta x^m\ .$$

Если теперь перенести $v^i$ по пути АДС, то для изменения $v^i$ получим аналогичную формулу, но с переставленными индексами $l$ и $m$:

$$v^{i\prime\prime\prime}=v^i-\Gamma^i_{km}v^k\delta x^m-\Gamma^i_{nl}v^n\Delta x^l-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}v^k\Delta x^l\delta x^m+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}v^k\Delta x^l\delta x^m\ .$$

Вычитая одно выражение из другого, найдем:

$$v^i_{ABC}-v^i_{ADC}=-\left[\left(\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right)+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}-\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right]v^k\Delta x^l\delta x^m\ . \tag{45}$$

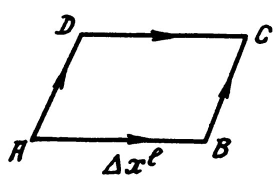


Рис. 3

Введем элемент площади контура $ds^{lm} = \Delta x^l \delta x^m - \Delta x^m \delta x^l$. Тогда формула (45) запишется в виде

$$v^i_{ABC} - v^i_{ADC} = -\frac{1}{2} R^i_{klm} v^k ds^{lm} . \qquad (46)$$

Из (46) сразу видно, что величина $R^i_{klm}$ является тензором. Она называется римановым тензором кривизны:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} . \qquad (47)$$

Таким образом, $R^i_{klm}$ определяет поворот вектора при параллельном переносе вокруг площадки $ds^{lm}$, т.е. представляет собой обобщение понятия гауссовой кривизны на случай $n$ измерений.

Выражение тензора Римана через производные от метрического тензора в общем случае весьма громоздко, но сильно упрощается в геодезической системе координат ( $L$-системе в случае 4-х измерений), где в данной точке $x^i$ $g_{ik} = \delta_{ik}, \Gamma^i_{kl} = 0$ и $\partial g_{ik} / \partial x^l = 0$:

$$R^i_{klm} = R_{iklm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} \right) . \qquad (48)$$

Из ( 48) следуют свойства симметрии тензора Римана:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} \ ; \quad R_{iklm} = R_{lmik} , \qquad (49)$$

а также формула

$$R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0. \qquad (50)$$

Эти соотношения линейны, а следовательно, справедливы в любой системе координат. Теперь легко показать, что число независимых компонент тензора Римана в произвольном $n$-мерном пространстве

$$\nu = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) . \qquad (51)$$

Для $n=1$ $\nu=0$; $n=2$ $\nu=1$; $n=4$ $\nu=20$.