2.5. Двумерный случай

На двумерной поверхности только одна компонента тензора Римана $R_{1212} \neq 0$. Для ее вычисления выберем геодезическую систему, в которой $g_{ik}=\delta_{ik}$ и $\Gamma^i_{kl}=0$. Пусть координаты x, y лежат в касательной плоскости, а z – по нормали к поверхности в данной точке. Уравнение поверхности в этой системе координат имеет вид $z=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy$. Приводя эту квадратичную форму к главным осям, находим: $z=\frac{1}{2R_1}(x^1)^2+\frac{1}{2R_2}(x^2)^2$, где R_1, R_2 – главные радиусы кривизны поверхности.

Элемент длины дуги на поверхности

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+dz^2=$$

$$=\left(1+\frac{x^1x^1}{R_1^2}\right)(dx^1)^2+\left(1+\frac{x^2x^2}{R_2^2}\right)(dx^2)^2+\frac{2}{R_1R_2}x^1x^2dx^1dx^2 .$$

Отсюда

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}\right)=\frac{1}{R_1R_2} . \qquad (52)$$

При обносе вектора по некоторому замкнутому контуру в соответствии с общей формулой (46) получим:

$$\delta A^1=-\frac{1}{2}R_{12ik}A^2ds^{ik} ; \; \delta A^2=-\frac{1}{2}R_{21ik}A^1ds^{ik} ; \; ds^{12}=d\sigma ,$$

или

$$\delta A^1=-R_{1212}A^2d\sigma , \quad \delta A^2=R_{1212}A^1d\sigma . \qquad (53)$$

Эти формулы имеют вид преобразования бесконечно малого поворота вектора $\vec{A}$ на угол $\delta\varphi$ в касательной плоскости:

$$\delta A^1=-A^2\delta\varphi , \; \delta A^2=A^1\delta\varphi ,$$

причем

$$\delta\varphi=R_{1212}\,d\sigma=\frac{1}{R_1R_2}d\sigma . \qquad (54)$$

Сравнивая это выражение с определением гауссовой кривизны поверхности (26), получаем, что эта кривизна

$$K=\frac{1}{R_1R_2} . \qquad (55)$$

В частности, для сферы $K=\frac{1}{R^2}$, так как $R_1=R_2=R$. Полученный результат был ранее выведен с помощью наглядного рассуждения.

Заметим, что если (55) выражает K через R_1 и R_2 (величины, характеризующие "внешние" свойства поверхности, ее форму в объемлющем пространстве), то формула (52) выражает K через метрику, которая есть внутренняя характеристика, очевидным образом не изменяющаяся при изгибании поверхности. Следовательно, K не меняется при изгибании – это доказанная Гауссом теорема, названная им "прекраснейшей" (*theorema egregium*). Как мы видим, тензорный анализ делает доказательство тривиальным.

3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

3.1. Тензор Римана и геометрия риманова пространства

Из самого построения тензора Римана видно, что его величина измеряет кривизну пространства, т.е. показывает, насколько оно в окрестности данной точки отличается от евклидового. Легко увидеть, что пользуясь римановым тензором, можно также установить, является ли пространство в целом евклидовым (псевдоевклидовым) или искривленным пространством Римана. Необходимым и достаточным условием евклидовости пространства является обращение в нуль всех компонент риманова тензора во всем пространстве.

Необходимость очевидна. В евклидовом пространстве в декартовых координатах $g_{ik}=\delta_{ik}$ и $\Gamma^{i}_{kl}=0$, поэтому $R_{iklm}=0$.

Наметим доказательство достаточности. Построим в любой точке Р n ортогональных ортов. Разнося этот координатный крест по пространству и используя то, что эта операция однозначна, если $R_{iklm}=0$, получим декартову координатную сетку, в которой координатные линии ортогональны в любой точке.

Теперь можно ответить на вопрос: насколько поле тяготения искривляет пространство? Как показано в разд. 1.4 для поля тяготения сферического тела $g_{00}=1+2\varphi=1-\frac{r_g}{r}$ (формулы (12) и (14)), т.е. известно отклонение g_{00} от значения $g_{00}=1$, соответствующего пространству Минковского. Ниже мы увидим, что такого же порядка и отклонения от η_{ik} всех других компонент g_{ik}, поэтому все отличные от нуля компоненты тензора Римана имеют порядок величины

$$R_{iklm}\sim\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\left(\frac{r_g}{r}\right)\sim\frac{r_g}{r^3}\,. \qquad (56)$$

Ясно, однако, что вопрос о том, насколько геометрия отклоняется от геометрии Евклида (Минковского), еще не сформулирован до конца. Правильная постановка вопроса – насколько в окрестности точки Р с линейным размером l геометрия (результаты измерений) отличается от евклидовой? Те-