В частности, для сферы $K = \frac{1}{R^2}$, так как $R_1 = R_2 = R$. Полученный результат был ранее выведен с помощью наглядного рассуждения.

Заметим, что если (55) выражает K через R_1 и R_2 (величины, характеризующие "внешние" свойства поверхности, ее форму в объемлющем пространстве), то формула (52) выражает K через метрику, которая есть внутренняя характеристика, очевидным образом не изменяющаяся при изгибании поверхности. Следовательно, K не меняется при изгибании — это доказанная Гауссом теорема, названная им "прекраснейшей" (*theorema egregium*). Как мы видим, тензорный анализ делает доказательство тривиальным.

3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

3.1. Тензор Римана и геометрия риманова пространства

Из самого построения тензора Римана видно, что его величина измеряет кривизну пространства, т.е. показывает, насколько оно в окрестности данной точки отличается от евклидового. Легко увидеть, что пользуясь римановым тензором, можно также установить, является ли пространство в целом евклидовым (псевдоевклидовым) или искривленным пространством Римана. Необходимым и достаточным условием евклидовости пространства является обращение в нуль всех компонент риманова тензора во всем пространстве.

Необходимость очевидна. В евклидовом пространстве в декартовых координатах $g_{ik} = \delta_{ik}$ и $\Gamma^{i}_{kl} = 0$, поэтому $R_{iklm} = 0$.

Наметим доказательство достаточности. Построим в любой точке P n ортогональных ортов. Разнося этот координатный крест по пространству и используя то, что эта операция однозначна, если $R_{iklm} = 0$, получим декартову координатную сетку, в которой координатные линии ортогональны в любой точке.

Теперь можно ответить на вопрос: насколько поле тяготения искривляет пространство? Как показано в разд. 1.4 для поля тяготения сферического тела $g_{00} = 1 + 2\varphi = 1 - \frac{r_g}{r}$ (формулы (12) и (14)), т.е. известно отклонение g_{00} от значения $g_{00} = 1$, соответствующего пространству Минковского. Ниже мы увидим, что такого же порядка и отклонения от η_{ik} всех других компонент g_{ik}, поэтому все отличные от нуля компоненты тензора Римана имеют порядок величины

$$R_{iklm} \sim \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \left(\frac{r_g}{r} \right) \sim \frac{r_g}{r^3} . \qquad (56)$$

Ясно, однако, что вопрос о том, насколько геометрия отклоняется от геометрии Евклида (Минковского), еще не сформулирован до конца. Правильная постановка вопроса — насколько в окрестности точки P с линейным размером l геометрия (результаты измерений) отличается от евклидовой? Теперь на него можно ответить. Так как компоненты R_{iklm} малы в окрестности реально достижимых тел, то можно прямо использовать формулу (46) для оценки того, на какой угол повернется четырехмерный вектор, перенесенный параллельно вокруг тяготеющего тела (например, Солнца) на расстоянии r от него. Получим, что угол

$$\varphi \sim |R_{iklm}| r^2 \sim \frac{r_g}{r^3} r^2 = \frac{r_g}{r} \quad . \tag{57}$$

Очевидно, что таким образом введенный параметр определяет, скажем, угол поворота гироскопа при обносе вокруг тяжелого тела.

Сделаем теперь несколько формальных замечаний. В дальнейшем очень важную роль будут играть тождества Бианки для тензора Римана, имеющие вид

$$R_{iklm;r} + R_{ikmr;l} + R_{ikrl;m} = 0 \quad . \tag{58}$$

В справедливости этой формулы проще всего убедиться прямым вычислением в геодезической системе координат. Учитывая (8), можно прямо подставить в (58) обычные производные от R_{iklm} и после тривиального приведения подобных членов получить нуль. Тождество Бианки имеет геометрический смысл, который был указан А. Картаном и подробно обсуждается в книге [8].

Введем свертку тензора Римана с метрическим тензором

$$R_{km} = g^{il} R_{iklm} \quad . \tag{59}$$

Тензор R_{km} называется тензором Риччи. Этот тензор симметричен, поскольку

$$R_{mk} = g^{il} R_{imlk} = g^{il} R_{lkim} = g^{li} R_{lkim} = R_{km} \quad .$$

Следовательно, R_{km} имеет $\frac{1}{2}n(n+1)$ независимых компонент в n-мерном пространстве и соответственно 10 компонент в обычном пространстве-времени.

Свернем тождество Бианки (58) с g^{km}. Учитывая, что свертка с помощью метрического тензора коммутирует с операцией ковариантности дифференцирования (см. разд. 2.3), получим: $R_{il;r} - R_{ir;l} - R^{n}_{irl;n} = 0$. Проведем теперь свертку по индексам i, l, введя величину, играющую важную роль в теории тяготения, – инвариантную кривизну R, которая определяется как свертка тензора Риччи:

$$R = g^{km} R_{km} \quad . \tag{60}$$

Тогда $R_{;r} - R^{n}_{r;n} - R^{n}_{r;n} = 0$ или, в другой форме записи, $R^{i}_{k;i} - \frac{1}{2} R_{;k} = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{D}{Dx^i}\left(R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R \right) = 0 \quad . \tag{61}$$

Тензор, стоящий в скобках, иногда называют тензором Эйнштейна и обозначают как

$$G_k^i = R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R \quad . \qquad (62)$$

или, в ковариантной форме, $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$. Тогда формула (61) принимает вид

$$\frac{DG_k^i}{Dx^i} = 0 \ . \qquad (63)$$

3.2. Уравнения гравитационного поля

Построенный в предыдущих параграфах математический аппарат достаточен для того, чтобы написать общие уравнения гравитационного поля. Следуя Эйнштейну, предположим, что источником гравитационного поля должен быть тензор энергии-импульса материи, который должен стоять в правой части уравнений. Это предположение есть четырехмерное обобщение того, что в теории Ньютона источником поля является плотность массы (в соответствии с уравнением Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi\rho$). Роль плотности массы в релятивизме играет компонента T_{00} тензора энергии-импульса. Отсюда естественное обобщение – справа в точных уравнениях должен стоять тензор T_{ik} . Выражение слева в искомых уравнениях должно переходить в $\Delta\varphi$ для g_{00} -компонент и, следовательно, уравнение должно быть линейно по $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$. Наконец, предположим, что уравнения должны быть общековариантными, т.е. справедливыми в любой системе координат. Следовательно, слева должен стоять ковариантный тензор второго ранга, старшие члены которого должны содержать слагаемые типа $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$. Такой тензор можно составить, используя тензоры R_{ik} , g_{ik} , $g_{ik}R$, т.е. общий вид искомого уравнения будет

$$c_1 R_{ik} + c_2 g_{ik} R + c_3 g_{ik} = a T_{ik} \quad . \qquad (64)$$

Вспомним теперь, что в пространстве Минковского справедлив закон сохранения $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = 0$. В соответствии с ПЭ, это соотношение справедливо и при наличии гравитационного поля в L-системе. Тогда в любой системе отсчета справедливо общековариантное уравнение

$$\frac{DT_{ik}}{Dx_i} = 0 \ . \qquad (65)$$

Так как $Dg_{ik} = 0$, то, полагая без ограничения общности $c_1 = 1$ и обозначая $c_3 = -\Lambda$, получаем:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = a T_{ik} \quad . \qquad (66)$$