$$G^i_k = R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R \quad . \tag{62}$$

или, в ковариантной форме, $G_{ik}=R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R$. Тогда формула (61) принимает вид

$$\frac{DG^i_k}{Dx^i} = 0 \ . \tag{63}$$

3.2. Уравнения гравитационного поля

Построенный в предыдущих параграфах математический аппарат достаточен для того, чтобы написать общие уравнения гравитационного поля. Следуя Эйнштейну, предположим, что источником гравитационного поля должен быть тензор энергии-импульса материи, который должен стоять в правой части уравнений. Это предположение есть четырехмерное обобщение того, что в теории Ньютона источником поля является плотность массы (в соответствии с уравнением Пуассона $\Delta\varphi=4\pi\rho$). Роль плотности массы в релятивизме играет компонента T_{00} тензора энергии-импульса. Отсюда естественное обобщение — справа в точных уравнениях должен стоять тензор T_{ik} . Выражение слева в искомых уравнениях должно переходить в $\Delta\varphi$ для g_{00} -компонент и, следовательно, уравнение должно быть линейно по $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$. Наконец, предположим, что уравнения должны быть общековариантными, т.е. справедливыми в любой системе координат. Следовательно, слева должен стоять ковариантный тензор второго ранга, старшие члены которого должны содержать слагаемые типа $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$. Такой тензор можно составить, используя тензоры R_{ik} , g_{ik} , $g_{ik}R$, т.е. общий вид искомого уравнения будет

$$c_1 R_{ik} + c_2 g_{ik} R + c_3 g_{ik} = aT_{ik} \quad . \tag{64}$$

Вспомним теперь, что в пространстве Минковского справедлив закон сохранения $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}=0$. В соответствии с ПЭ, это соотношение справедливо и при наличии гравитационного поля в L-системе. Тогда в любой системе отсчета справедливо общековариантное уравнение

$$\frac{DT_{ik}}{Dx_i} = 0 \ . \tag{65}$$

Так как $Dg_{ik} = 0$, то, полагая без ограничения общности $c_1 = 1$ и обозначая $c_3 = -\Lambda$, получаем:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = aT_{ik} \quad . \tag{66}$$

Последнее слагаемое в левой части уравнения (66) называется космологическим членом, а Λ – космологической постоянной. Мы будем пока что считать, что $\Lambda = 0$. Действительно, в пустом пространстве, где $T_{ik} = 0$, уравнения (66) принимают вид $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = 0$. Пусть $\Lambda = 0$, тогда нетрудно увидеть, что возможным решением будет $g_{ik} = \eta_{ik}$, $R_{ik} = 0$ и $R = 0$, т.е. уравнения допускают как предельный случай решение в виде метрики Минковского. Если же $\Lambda \neq 0$, то это уже не так. Можно заведомо утверждать, что величина космологической постоянной Λ мала в настоящее время, так как из астрономии известно, что вдали от гравитирующих источников пространство-время с большой точностью евклидово. Поэтому Λ-член должен быть крайне малым, его влияние может сказываться только на временах и расстояниях, сравнимых с возрастом и радиусом Вселенной. Во второй части книги мы вернемся к обсуждению роли космологической постоянной при анализе самых ранних стадий эволюции Вселенной, когда, возможно, эта роль была решающей. При обсуждении эффектов ОТО в масштабах Солнечной системы можно считать $\Lambda = 0$. Так мы приходим к уравнениям, полученным в 1915 г. Гильбертом и Эйнштейном:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi G T_{ik} \quad . \tag{67}$$

Константа $\alpha = 8\pi G$ выбрана так, чтобы в пределе слабого поля уравнения (67) приводили к правильной форме записи закона тяготения Ньютона, в чем мы убедимся ниже.

В пустоте $T_{ik} = 0$. Свертывая (67) с g^{ik}, получим, что $R = 0$ и уравнения поля в пустоте имеют вид

$$R_{ik} = 0 \quad . \tag{68}$$

Исторически это уравнение было рассмотрено Эйнштейном раньше уравнения (67). Сейчас в русскоязычной литературе уравнение (67) обычно называют уравнением Гильберта-Эйнштейна.

Соображения, приводящие к уравнению (67), основаны, таким образом, на трех принципах – эквивалентности, ковариантности и соответствия (требование, чтобы уравнение переходило в соответствующем пределе в уравнение Ньютона) – и на постулате о допустимости псевдоевклидового решения. Последнее не столь существенно, так как теория с $\Lambda \neq 0$ – в общем, та же ОТО. К сказанному можно добавить, что, как показал Вейль, условия, наложенные на правую часть уравнений, определяют левую часть однозначно с точностью до константы c_3, т.е. любой линейный по $\partial^2 g_{ik} / \partial x^l \partial x^m$ тензор имеет вид $c_1 R_{ik} + c_2 g_{ik} R + c_3 g_{ik}$.

Больше всего дискуссий всегда вызывает вопрос о том, в какой степени словесно высказанный принцип эквивалентности приводит к геометрии Римана. Мы подозреваем, что вопрос недостаточно однозначен для того, чтобы можно было дать на него ответ.

К уравнениям (67) необходимо добавить уравнения движения

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{kl} u^k u^l \ . \tag{69}$$

Тогда уравнения (67)–(69) представляют собой полную систему уравнений механики ОТО. Для света надо либо делать предельный переход, либо пользоваться уравнением $ds = 0$ и принципом Гюйгенса.

Можно записать (67) в другой форме, если провести свертку с g^{ik}. Тогда

$$R - 2R = 8\pi G T \ , \ R = -8\pi G T \quad ; \ T = Sp\, T_{ik} \equiv g^{ik} T_{ik} \quad ,$$

откуда

$$R_{ik} = 8\pi G \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \ . \tag{70}$$

3.3. Предел слабого поля

Покажем, что в пределе слабого поля уравнения Эйнштейна содержат ньютоновский закон тяготения.

Пусть

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \ , \ |h_{ik}| \ll 1 \ . \tag{71}$$

Ограничиваясь членами низшего порядка по h_{ik} в тензоре R_{iklm}, получим:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) \ . \tag{72}$$

Сворачивая с g^{il}, найдем тензор Риччи:

$$R_{km} = g^{il} R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^i} \right) \ . \tag{73}$$

Наложим теперь дополнительные условия на компоненты h_{ik}, учитывая, что произвольное преобразование координат вносит четыре произвольные функции. Это позволяет удовлетворить четырем дополнительным условиям. Выберем эти условия (аналог условий Лоренца в электродинамике) в виде

$$\frac{\partial h_{ki}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ii}}{\partial x^k} = 0 \ . \tag{74}$$