К уравнениям (67) необходимо добавить уравнения движения

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{kl}\, u^k u^l \ . \tag{69}$$

Тогда уравнения (67)–(69) представляют собой полную систему уравнений механики ОТО. Для света надо либо делать предельный переход, либо пользоваться уравнением $ds=0$ и принципом Гюйгенса.

Можно записать (67) в другой форме, если провести свертку с g^{ik}. Тогда

$$R - 2R = 8\pi G T \ , \quad R = -8\pi G T \quad ; \; T = Sp\, T_{ik} \equiv g^{ik} T_{ik} \quad ,$$

откуда

$$R_{ik} = 8\pi G \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \ . \tag{70}$$

3.3. Предел слабого поля

Покажем, что в пределе слабого поля уравнения Эйнштейна содержат ньютоновский закон тяготения.

Пусть

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \quad , \quad |h_{ik}| \ll 1 \ . \tag{71}$$

Ограничиваясь членами низшего порядка по h_{ik} в тензоре R_{iklm}, получим:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) \cdot \tag{72}$$

Сворачивая с g^{il}, найдем тензор Риччи:

$$R_{km} = g^{il} R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^i} \right) \ . \tag{73}$$

Наложим теперь дополнительные условия на компоненты h_{ik}, учитывая, что произвольное преобразование координат вносит четыре произвольные функции. Это позволяет удовлетворить четырем дополнительным условиям. Выберем эти условия (аналог условий Лоренца в электродинамике) в виде

$$\frac{\partial h_{ki}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ii}}{\partial x^k} = 0 \ . \tag{74}$$

Тогда три первые члена в (73) исчезнут и в силу уравнений (70) мы приходим к уравнениям слабого поля

$$\Box h_{km} = -16\pi G\left(T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}T\right). \qquad (75)$$

Уравнение (75) есть уравнение Лапласа, решение которого выражается через запаздывающие потенциалы:

$$h_{km}(\vec{r}) = -4G\int \frac{\left[T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}T\right]_{t-|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'. \qquad (76)$$

Рассмотрим случай покоящегося тела, для которого

$$T_{00} = \rho \neq 0\ , \ T = \rho\ ;\ T_{\alpha\beta} = 0. \qquad (77)$$

Тогда

$$h_{00} = -2G\int \frac{\rho\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx -\frac{2G}{r}\int \rho\, dV' = -\frac{2Gm}{r}. \qquad (78)$$

Итак,

$$h_{00} = -\frac{2Gm}{r}\ , \quad h_{0\alpha} = 0 \quad h_{\alpha\beta} = \frac{2Gm}{r}\,\delta_{\alpha\beta}. \qquad (79)$$

Для движения нерелятивистской частицы существенна только компонента h_{00}, и мы получаем ньютоновский предел ($g_{00} = 1 + 2\varphi$, $\varphi = -Gm/r$), обсуждавшийся в разд. 1.4.

Метрика в поле материальной точки в избранной калибровке имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right)dl^2\ , \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (80)$$

Подчеркнем, что координаты t, x, y, z не отвечают тем, которые могут быть измерены часами и линейкой. Здесь это метки, неявно определенные калибровочными условиями (74).

3.4. Свойства уравнений гравитации. Сопоставление с электродинамикой

Сопоставим уравнения электродинамики Максвелла-Лоренца и уравнения тяготения Эйнштейна. Прежде всего, следует подчеркнуть, что и те, и другие - это уравнения классического поля. Есть много общего и в структуре этих уравнений. Но есть и принципиальные различия. Для простоты в дальнейшем будем считать взаимодействующие с полем частицы точечными.