Тогда три первые члена в (73) исчезнут и в силу уравнений (70) мы приходим к уравнениям слабого поля

$$\Box h_{km} = -16\pi G\left(T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}T\right). \tag{75}$$

Уравнение (75) есть уравнение Лапласа, решение которого выражается через запаздывающие потенциалы:

$$h_{km}(\vec{r}) = -4G\int \frac{\left[T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}T\right]_{t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'. \tag{76}$$

Рассмотрим случай покоящегося тела, для которого

$$T_{00} = \rho \neq 0\ ,\ T = \rho\ ;\ T_{\alpha\beta} = 0. \tag{77}$$

Тогда

$$h_{00} = -2G\int \frac{\rho\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx -\frac{2G}{r}\int \rho\,dV' = -\frac{2Gm}{r}. \tag{78}$$

Итак,

$$h_{00} = -\frac{2Gm}{r}\ ,\quad h_{0\alpha} = 0 \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{2Gm}{r}\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{79}$$

Для движения нерелятивистской частицы существенна только компонента h_{00}, и мы получаем ньютоновский предел ($g_{00} = 1 + 2\varphi$, $\varphi = -Gm/r$), обсуждавшийся в разд. 1.4.

Метрика в поле материальной точки в избранной калибровке имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right)dl^2\ ,\quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{80}$$

Подчеркнем, что координаты t , x , y , z не отвечают тем, которые могут быть измерены часами и линейкой. Здесь это метки, неявно определенные калибровочными условиями (74).

3.4. Свойства уравнений гравитации. Сопоставление с электродинамикой

Сопоставим уравнения электродинамики Максвелла-Лоренца и уравнения тяготения Эйнштейна. Прежде всего, следует подчеркнуть, что и те, и другие - это уравнения классического поля. Есть много общего и в структуре этих уравнений. Но есть и принципиальные различия. Для простоты в дальнейшем будем считать взаимодействующие с полем частицы точечными.

Электромагнитное поле описывается потенциалом $A^i(x)$, представляющим собой четырехмерный вектор в пространстве Минковского. Теория электромагнетизма сводится к двум уравнениям. Первое представляет уравнение движения материальной точки массой m_A и c зарядом e_A в заданном электромагнитном поле:

$$m_A \frac{du^i}{ds} = e_A F^{ik} u_k \quad , \; F^{ik} = \partial^i A^k - \partial^k A^i \, , \tag{81}$$

где $ds = \sqrt{\eta_{ik} dx^i dx^k}$. Заметим, что в (81) входят первые производные от $A^i(x)$.

Второе уравнение определяет поле (если задана плотность тока заряженных частиц):

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -4\pi j^i \; , \tag{82}$$

где

$$j^i = \sum_A e_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_A(t))\, u^i \frac{ds}{dt} \; . \tag{83}$$

Уравнения (82) определяет потенциал неоднозначно. Очевидно, что если $A^i(x)$ есть решение (82), то и $A^{i\prime}(x) = A^i(x) + \partial^i \chi(x)$ (где $\chi(x)$ – произвольная функция координат и времени) также будет решением. Как известно, преобразование от A^i к $A^{i\prime}$ называется (по запутанным историческим причинам) калибровочным. Легко показать, что всегда можно сделать такое преобразование калибровки (или, как говорят, выбрать калибровку), что $\partial_i A^i(x) = 0$ и уравнение (82) примет вид

$$\Box A^i = 4\pi j^i \; . \tag{84}$$

Уравнения (81) и (82) в принципе полны (с точностью до трудностей с реакцией излучения), т.е. если заданы заряды и поля на какой-то пространственноподобной поверхности, то дальше уравнения позволяют предсказать эволюцию системы. Обычно решаются более простые задачи: дан заряд – найти поле (кулоновское), дано поле – найти движение заряда и т.п. Важной особенностью уравнений электродинамики является их линейность. Это означает, что справедлив принцип суперпозиции: поля, создаваемые разными источниками, складываются.

В случае слабого ГП в определенной калибровке (74) (аналогичной лоренцовской калибровке в электродинамике) уравнения поля имеют вид (см. (разд. 3.3))

$$\Box h_{ik} = -16\pi G \left(T_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} T \right) , \tag{85}$$

где симметричный тензор $h_{ik}(x)$ есть потенциал слабого ГП, аналогичный $A_i(x)$ в уравнениях электродинамики, а роль источника поля выполняет тензор энергии-импульса материи T_{ik}, который для потока невзаимодействующих частиц ("пыль") имеет вид

$$T_{ik} = \sum_{A} m_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_A(t)) u_i u_k \frac{ds}{dt} . \tag{86}$$

Сходство уравнений (85) и (82) очевидно.

Если же перейти теперь к точным уравнениям гравитации, то обнаруживается принципиальное отличие их от уравнений электродинамики, заключающееся в том, что уравнения гравитационного поля существенно нелинейны. Это связано с самой природой ГП. Несколько нестрого можно сказать, что оно несет энергию, которая сама является источником ГП. Источником же электромагнитного поля является заряд. Само электромагнитное поле заряда не несет, оно нейтрально.

В связи с этим отметим, что, как уже говорилось, геометрия пространства в ОТО похожа на геометрию спущенного мяча. В такой геометрии нет группы симметрии (в частной ТО она есть – это группа Пуанкаре; см., например,[23]). Так как законы сохранения порождаются группой движений (теорема Нетер), то в ОТО в общем случае интегралов движения нет и энергия не сохраняется. Связь проблемы законов сохранения и группы симметрий с ясностью прослеживается в ранних работах Ф. Клейна [24]. Затем понимание проблемы было, скорее, утрачено. Явный пример мира с несохранением энергии можно найти в работе[25].

Нелинейность уравнений гравитации приводит, прежде всего, к тому, что решение для слабого ГП (80), найденное выше, верно только в первом порядке по параметру r_g/r. В этом порядке

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} \ ; \quad g_{\alpha\alpha} = -\left(1 + \frac{r_g}{r}\right) . \tag{87}$$

Если мы хотим вычислить g_{ik} или h_{ik} в следующем приближении, то в линеаризованном подходе необходимо найти эффективную плотность энергии, соответствующую $h_{ik} = g_{ik} - \eta_{ik}$. По аналогии с тем, как для электромагнитного поля плотность энергии квадратична по производным от потенциала $A_i(x)$, плотность энергии ГП должна быть квадратична по производным от $h_{ik}(x)$, т.е. быть порядка r_g^2/r^4. Поэтому уравнения второго приближения для h_{ik}^2 имеют структуру

$$\Delta h_{ik}^{(2)} \sim \frac{r_g^2}{r^4} \ ; \quad h_{ik}^{(2)} \sim \frac{r_g^2}{r^2} . \tag{88}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в силу нелинейности уравнений гравитации метрическая форма в пространстве, окружающем массивное точечное тело, должна иметь вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \gamma\frac{r_g^2}{r^2} + \ldots\right)dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r} + \delta\frac{r_g^2}{r^2} + \ldots\right)dl^2 \quad (89)$$

(далее для этого случая будет получено точное решение).

Другим важным отличием уравнений гравитации от уравнений электродинамики является то, что в системе уравнений для электромагнитного поля уравнения для мировой линии частицы не вытекают из уравнений поля – они должны задаваться независимо. Из уравнения (82) и антисимметрии F^{ik} следует сохранение тока:

$$\partial_i j^i(x) = 0. \quad (90)$$

Но это уравнение слабо ограничивает движение частицы. Оно требует только, чтобы мировая линия частицы не "рвалась".

Для системы уравнений ОТО дело обстоит иначе. Уравнение (67) содержит в силу тождеств Бианки условие равенства нулю ковариантной производной тензора T_{ik}:

$$\frac{DT_{ik}}{Dx_k} = 0 \quad (91)$$

и это похоже на (90), но (91), в отличие от (90), приводит к жестким ограничениям на движение – из этого условия движение определяется полностью, т.е. из него следуют уравнения движения (69).

Вывод упрощается, если вместо одной частицы рассмотреть пыль – облако частиц малой массы, движущихся во внешнем поле (взаимодействием частиц пренебрегаем). Тензор T_{ik} для такой пыли имеет вид

$$T_{ik} = \rho u_i u_k, \quad (92)$$

где ρ – инвариантная плотность энергии (массы), т.е. плотность в сопутствующей системе. Возьмем ковариантную производную от T^{ik}:

$$T^{ik}_{;k} = (\rho u^i u^k)_{;k} = (\rho u^k)_{;k} u^i + \rho u^k u^i_{;k}. \quad (93)$$

Вспоминая выражение (44) для ковариантной производной от вектора, получим:

$$(\rho u^i u^k)_{;k} = (\rho u^k)_{;k} u^i + \rho \frac{Du^i}{Ds}. \quad (94)$$

Умножим это уравнение на u_i. Учитывая, что $u_i u^i = 1$, находим:

$$(\rho u^k)_{;k} + \rho u_i \frac{Du^i}{Ds} = 0. \quad (95)$$

Поскольку $u_i Du^i = 0$:

$$(\rho u^k)_{;k} = 0. \quad (96)$$

Если массы всех пылинок равны, то (96) представляет собой просто закон сохранения числа частиц, записанный в ковариантном виде. В силу (96) из (94) следует при $\rho \neq 0$, что

$$\frac{Du^i}{Ds} = 0 . \tag{97}$$

Это уравнение тождественно уравнению (69) для геодезической, т.е. уравнению движения частицы в ГП.

Таким образом, утверждение доказано: уравнения движения содержатся в уравнениях Эйнштейна. Пыль здесь, конечно, играет чисто вспомогательную роль. Можно провести доказательство и для одной частицы (Эддингтон, см.[5]).

Эйнштейн считал тот факт, что в ОТО уравнения поля содержат уравнения движения, принципиально связанным с нелинейностью теории. На первый взгляд, это убедительно. В линейной электродинамике сумма полей зарядов A и B есть снова решение уравнений, поэтому A и B могут покоиться без противоречия с уравнениями поля, и для описания движения нужно еще уравнение Лоренца. В гравитации нет линейности, принцип суперпозиции не действует, поэтому массы начинают двигаться друг относительно друга. Но из сказанного выше скорее видно, что на самом деле суть вопроса в том, что четыре уравнения (91) более жестко (полностью) определяют движение, чем одно уравнение (90), а нелинейность, как кажется, несущественна. С другой стороны, без нелинейности в принципе теория просто противоречива, поэтому строго вопрос вообще нельзя поставить.

Заметим, наконец, что протяженные упругие тела по геодезическим, вообще говоря, не движутся [26]. Это легко понять из следующего примера. Рассмотрим простую задачу: шарики скользят по поверхности сферы. Тогда геодезические – большие круги, а расстояние между шариками, очевидно, меняется. Если их скрепить пружинкой, они уйдут с геодезических и будут совершать достаточно сложные осциллирующие движения. Аналогично, два шара в ГП, скрепленные пружиной, также уйдут с геодезических [27]. Поскольку переход к пределу бесконечно малого тела в гравитации невозможен из-за коллапса, то в действительности идеализация движущихся по геодезическим пылинок логически противоречива и верна только в грубом приближении (реально это приближение неплохо выполняется, скажем, для космических зондов). Ниже мы увидим, что часы конечного размера, строго говоря, не измеряют времени. Из всего этого следует, что для того чтобы иметь логически замкнутую модель ОТО, нужно ввести классическое поле материи. Это впервые сделал Д. Гильберт в упоминавшейся работе 1915 г. Он справедливо считал, что тогда возникнет своего рода единая теория материи и гравитации, в которой однозначно разделить геометрию и физику нельзя. В этом смысле в споре, который вел Эйнштейн с уже умершим А. Пуанкаре в академической речи

1921 г., правильной была оспаривавшаяся Эйнштейном точка зрения Пуанкаре.

3.5. Возможны ли другие теории тяготения?

В некотором смысле, ответ на этот вопрос отрицателен. Теория Эйнштейна предсказывает некоторое число эффектов, эти предсказания с достаточной точностью совпадают с опытом – ясно, что любая другая достаточно простая теория даст другие числа. Можно пытаться усложнить теорию, вводя новые константы и поля. При этом необходимо держать все добавления в таких пределах, чтобы уложиться в ошибки эксперимента. По мере уменьшения ошибок сужиаются и пределы на дополнительные параметры. В настоящее время, грубо говоря, согласие с опытом ОТО установлено с точностью примерно 1%.

Если не проблема, то своеобразие положения ОТО состоит в том, что экспериментальных фактов все же немного, если сравнивать, скажем, с квантовой электродинамикой или классической механикой. Если в последних случаях теория накрывает факты, можно сказать, всюду плотно, то в ОТО теория похожа на очень красивый мост на нескольких опорах с большими пролетами – свободного пространства много, и часто появляется искушение что-то туда вставить.

Однозначность уравнений Эйнштейна диктуется требованием простоты. Очевидно, что пока мы не накрыли факты всюду плотно, всегда есть возможность как-то "изуродовать" теорию. Не бесполезно все же выдвинуть гипотезу простоты в какой-то приемлемой форме и затем посмотреть, есть ли другие возможные теории тяготения, кроме теории Эйнштейна. Будем исходить из того, что теория должна быть теорией поля и в первом приближении быть релятивистски инвариантной. Тогда в рамках гипотезы простоты нужно считать, что поле должно быть: скаляром; вектором; тензором второго ранга и т.д.

Прежде всего, гравитационное поле должно быть безмассовым, так как гравитация – дальнодействующее взаимодействие. На языке квантовых полей это означает, что масса квантов соответствующих полей равна нулю (в противном случае взаимодействие имеет вид e^{-mr}/r и эффективно исчезает на расстояниях $r \sim \frac{1}{m}$ в единицах $\hbar = c = 1$).

Скалярные и векторные теории сразу исключаются опытом. Рассмотрим скалярный вариант. Если мы не хотим прийти к противоречию с опытом типа опыта Этвеша, то нужно, чтобы скалярное поле φ взаимодействовало с чем-то вроде T_{00}. Действительно, инертная масса есть $\int T_{00}\, dV$, и если мы хотим , чтобы ускорения были равны для тел любого состава, то сила должна быть тоже $\sim T_{00}$. Такое взаимодействие противоречит лоренцинвариантности, но можно попытаться взять взаимодействие в виде

$$\mathcal{L}_{int} = -\varphi T \ , \qquad (98)$$