$$\vec{\Omega} = \frac{G}{r^3}\left(3\vec{n}(\vec{M}\vec{n}) - \vec{M}\right), \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{148}$$

Этот эффект носит название эффекта Лензе-Тирринга.

Как следует из полученной формулы (148), на полюсе $\vec{n}\vec{M} = M$ и $\Omega \sim M$ т.е. вращающееся тело увлекает гироскоп.

Легко увидеть, что частота прецессии

$$\Omega \sim G\frac{M}{R^3} \sim G\frac{I\omega}{R^3} \sim G\frac{m\omega}{R} \sim \frac{r_g}{r}\omega , \tag{149}$$

где ω – угловая скорость вращающегося тела.

Если считать, что формула (149) применима и для случая сильных полей $(R \sim r_g)$, то получаем, что гироскоп полностью увлекается вращающейся массой, т.е.

$$\Omega \sim \omega . \tag{150}$$

Такой же по порядку величины результат получится, если рассматривать массивную оболочку и гироскоп, помещенный внутри нее.

Полученные результаты связаны с очень долгими дискуссиями об относительности (или абсолютности) вращения. Ньютон в "Началах" считал, что вращение абсолютно: если мы вращаем ведерко вместе с водой, то вода должна подниматься к краям, а если ведерко воды не увлекает, то вода не поднимается, – значит, дело не в относительном движении вода-ведро, а в абсолютном движении воды. Мах высказал предположение, что, может быть, если крутить вокруг ведерка всю Вселенную, то вода поднимется. Результат (150) в общем говорит в пользу гипотезы Маха, но точно сформулировать его идеи в рамках ОТО не удается. Может быть, это и невозможно сделать. Правда, самого Эйнштейна эти идеи очень стимулировали в поисках полевой теории тяготения.

4.10. Прецессия гироскопа, движущегося в ГП массивного тела

Прецессия гироскопа, движущегося в ГП массивного тела, называется геодезической прецессией. У такой прецессии есть две причины, и одна из них никак не связана с ОТО, а есть чисто кинематический эффект частной ТО. Оказывается, что в рамках частной ТО гироскоп, центр масс которого движется ускоренно $(\dot{v} \neq 0)$, прецессирует, даже если в системе покоя отсутствуют силы. Такой эффект называется прецессией Томаса. Он, по существу, связан с тем, что преобразования Лоренца с разными направлениями сами по себе не образуют группы $(L(d\vec{v})L(\vec{v}) \neq L(\vec{v}+d\vec{v}))$; левая часть отличается от правой на преобразование вращения.

Для того чтобы вычислить угол томасовской прецессии, рассмотрим пространство скоростей в частной ТО $S(\vec{v})$, точкам которого сопоставим точку, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ относительно данной системы отсчета. Для простоты ограничимся двумерным случаем, тогда можно рассматривать плоскость $\vec{v}$ с координатами v_x, v_y. Точка, движущаяся ускоренно, перемещается по кривой $\vec{v}(t)$ в этой плоскости (так называемый годограф). Теперь введем метрику в пространстве $S(\vec{v})$, определив расстояние между двумя точками $P(\vec{v})$ и $P'(\vec{v}+d\vec{v})$ как относительную скорость соответствующих точек (она, разумеется, не равна $d\vec{v}$). Вместо координат v_x, v_y удобно ввести в качестве радиальной переменной быстроту $\varkappa$ так, что $v = th\,\varkappa$, а в качестве угловой переменной угол $\varphi = arctg\,\frac{v_y}{v_x}$. Найдем теперь интервал $d\Gamma$ в пространстве скоростей.

Напомним, что если две системы отсчета движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то их относительная скорость равна

$$v_{отн}^2 = \left[(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2-(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)^2\right]/(1-\vec{v}_1\vec{v}_2)^2$$

(эта формула легко получается, если рассмотреть 4-скорости систем отсчета $u_1=(\gamma_1,\gamma_1\vec{v}_1)$ и $u_2=(\gamma_2,\gamma_2\vec{v}_2)$ по отношению к произвольной системе, а затем считать, что первая система покоится и $u_1=(1,0)$, а 4-скорость второй системы $u_2=(\gamma,\gamma\,\vec{v}_{отн})$. Из инвариантности скалярного произведения (u_1u_2) вытекает приведенная формула. Таким образом, полагая $\vec{v}_2=\vec{v}_1+d\vec{v}$, находим, что

$$dv_{отн}^2 = \frac{d\vec{v}^2-(\vec{v}\times d\vec{v})^2}{(1-v^2)^2} \quad . \tag{151}$$

Пусть $\vec{v}\,\|\,d\vec{v}$, тогда $dv_{\|отн}^2 = dv^2/(1-v^2)^2 = d\varkappa^2$ т.е. приращение быстроты есть как раз приращение относительной скорости. Пусть теперь $\vec{v}\perp d\vec{v}$, тогда

$$d\,v_{отн}^2 = \frac{dv^2-v^2dv^2}{(1-v^2)^2} = \frac{v^2\,d\varphi^2}{1-v^2} = sh^2\varkappa\,d\varphi^2 \;.$$

В результате для нашего двумерного пространства скоростей приходим к выводу, что

$$d\Gamma^2 = dv_{отн}^2 = d\varkappa^2 + sh^2\varkappa\,d\varphi^2 \;. \tag{152}$$

Элементарное вычисление дает для гауссовой кривизны К двумерного пространства с метрикой (152) значение $K=-1$. Такое двумерное пространство есть не что иное, как плоскость Лобачевского. В действительности, можно просто определить плоскость Лобачевского как риманово пространство с постоянной отрицательной кривизной, хотя, конечно, сам Лобачевский пользовался другим определением. Ниже мы будем использовать только те свойства двумерного пространства скоростей, которые вытекают из того, что $K=-1$. Заметим также, что трехмерному пространству скоростей соответствует трехмерное пространство Лобачевского.

В данной точке пространства скоростей можно построить векторы, "находящиеся в этой точке" (точнее, в касательном пространстве). В физической терминологии это трехмерные векторы, определенные в системе отсчета, движущейся вместе с точкой А со скоростью $\vec{v}_A$.

Рассмотрим теперь малую окрестность А. При малых относительных скоростях, т.е. для точек В, близких к А, справедлив ньютоновский закон сложения скоростей, соответствующий геометрии Евклида в пространстве скоростей (локально всякое риманово пространство евклидово), поэтому параллельный перенос в этом пространстве означает перенос с сохранением направления вектора в смысле механики Ньютона из системы отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_A$, в систему, движущуюся со скоростью $\vec{v}_B$.

В принципе, таким образом определенный параллельный перенос относится к любому трехмерному вектору, но вектор углового момента особенно удобен, так как нам не надо думать, как сохранить параллелизм: из ньютоновской механики, которая действует в любой малой окрестности пространства скоростей, следует, что момент $\vec{M}$ сохраняет направление, если на волчок не действует момент сил (на этом основан гирокомпас). Достаточно знать трехмерный момент, определенный в системе покоя волчка $M_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma}$, где $M_{\beta\gamma} = \int (x_\beta T_{0\gamma} - x_\gamma T_{0\beta})\, d^3x$.

Пусть центр тяжести волчка движется ускоренно, но момента сил не возникает. Тогда $\vec{M}$ переносится параллельно по годографу. Так как в целом пространство скоростей неевклидово, то вектор будет, вообще говоря, поворачиваться. Здесь, правда, нужно договориться, как определять направление $\vec{M}$ в разных точках годографа. Принятое определение таково: рассмотрим покоящиеся оси в О, соответствующие лабораторной системе отсчета $L(0)$, тогда можно определить сопровождающую систему отсчета $L(\vec{v}_A)$ как систему, полученную чисто лоренцовским преобразованием без вращения (рис. 7). Так как бесконечно малое преобразование Лоренца есть преобразование Галилея, то $L(\vec{v}_A)$ получается параллельным переносом $L(0)$ вдоль $\vec{v}_A$. Из рис. 7 видно, что при движении из А в В вектор $\vec{M}$ переносится параллельно вдоль годографа, а систему $L(\vec{v}_B)$ можно получить переносом по АОВ. Поэтому изменение угла α равно повороту вектора при параллельном переносе по контуру АОВ: $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = \pm K \cdot S_{AOB}$.

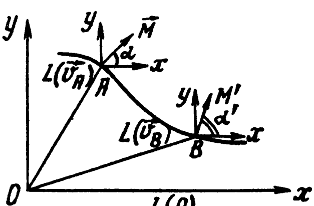

Рис. 7

В нашем случае $K=-1$. Если скорости малы, то можно в первом приближении вычислить площадь S_{AOB} в евклидовом пространстве, тогда $S_{AOB} = \left|\frac{1}{2}(\vec{v} \times d\vec{v})\right|$ и $d\alpha = -\left|\frac{1}{2}(\vec{v} \times d\vec{v})\right|$. Легко убедиться, что $d\alpha$ будет иметь правильный знак, если рассматривать это равенство как векторное:

$$d\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}(\vec{v} \times d\vec{v}). \qquad (153)$$

Очевидно, что теперь можно рассматривать и неплоские годографы, используя (153) и суммируя повороты на последовательных участках траектории.

Угол $d\vec{\alpha}$ есть, по определению, угол поворота вектора момента, измеренный в сопутствующей системе. Этот поворот возникает при отсутствии внешних пар сил за счет неевклидовых свойств пространства скоростей. Это явление было открыто Томасом в 1926 г. явным рассмотрением соответствующей последовательности лоренцовских преобразований. Частота томасовской прецессии, которую мы обозначим $\vec{\Omega}_T$, равна

$$\vec{\Omega}_T = -\frac{1}{2}\left(\vec{v} \times \dot{\vec{v}}\right). \tag{154}$$

Заметим, что Томас обнаружил это явление, занимаясь проблемой тонкого расщепления уровней энергии в атомах. До него предполагалось, что тонкое расщепление должно вызываться взаимодействием спина электрона с магнитным полем, возникающим в системе покоя электрона в результате лоренцовского преобразования электрического поля ядра. Легко, однако, убедиться в том, что при этом для энергии взаимодействия получится результат в два раза больший, чем на опыте. Указанное расхождение было большой трудностью для только что родившейся тогда гипотезы о спине электрона. Томас обнаружил, что найденная им прецессия уменьшает энергию вдвое ("томасовская половинка"), так что достигается согласие с опытом. Разумеется, из уравнения Дирака все это вытекает автоматически.

Если волчок движется в гравитационном поле (Земли, например), то $\dot{\vec{v}} = -\nabla\varphi$ и угловая скорость томасовской прецессии

$$\vec{\Omega}_T = \frac{1}{2}\left(\vec{v} \times \nabla\varphi\right). \tag{155}$$

Для движения в гравитационном поле к прецессии Томаса добавляется еще эффект, связанный с появлением при $v \neq 0$ момента сил в системе покоя волчка. Этот момент возникает из-за того, что лоренцовские преобразования компонент h_{00} и $h_{\alpha\alpha}$ в эту систему дают $h_{0\alpha}$-компоненты, которые, как мы уже показали, приводят к возникновению прецессии. Найдем вклад этого эффекта.

Метрика в статическом слабом поле имеет вид

$$g_{00} = 1+2\varphi \;;\; h_{00} = h^{00} = 2\varphi \;;\; g_{\alpha\alpha} = -(1-2\varphi),\; h_{\alpha\alpha} = h^{\alpha\alpha} = 2\varphi ,$$

где φ — ньютоновский потенциал. При лоренцовском преобразовании в сопутствующую систему появляются компоненты $h_{0\alpha}$. так как полагая $v = v_z$ имеем $x'^i = \alpha^i_k x^k$, где

$$\alpha^i_k = \begin{pmatrix} \alpha^0_0 & \alpha^0_z \\ \alpha^0_z & \alpha^z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

откуда

$$h'_{0z} = \alpha^0_k \alpha^z_i \, h^{ki} = -2v\varphi - 2v\varphi \, .$$

Первое слагаемое $h'^{0z}_{врем.} = -2v\varphi$ полностью определяется временной компонентой метрического тензора h_{00}, а второе слагаемое $h'^{z}_{простр.} = -2v\varphi$ содержит вклад от пространственных компонент $h_{\alpha\alpha}$. Опуская индексы и обобщая на случай лоренцовского преобразования вдоль произвольного направления скорости $\vec{v}$, находим:

$$\vec{h}_{врем.} = -2\vec{v}\varphi \quad , \quad \vec{h}_{простр.} = -2\vec{v}\varphi \, . \qquad (156)$$

Поскольку $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{h}$, то получаем вклады в угловую скорость прецессии от пространственной части метрики $\vec{\Omega}_{простр.} = -(\vec{v} \times \nabla\varphi)$ и от временной части метрики $\vec{\Omega}_{врем.} = -(\vec{v} \times \nabla\varphi)$. Поэтому окончательно полная угловая скорость прецессии

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_{простр.} + \vec{\Omega}_{врем.} = -\frac{3}{2} (\vec{v} \times \nabla\varphi) \, . \qquad (157)$$

Выражение (157) для угловой скорости геодезической прецессии содержит три слагаемых. Величина $\vec{\Omega}_{простр.}$ связана с кривизной пространства и имеет поэтому чисто геометрическую природу. Оба других слагаемых $\vec{\Omega}_T$ и $\vec{\Omega}_{врем.}$ обусловлены величиной h_{00}. Для $\vec{\Omega}_{врем.}$ это очевидно, а $\vec{\Omega}_T$ выражается через ускорение $\dot{\vec{v}}$, также определяющееся через h_{00}. Сумма $\vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_{врем.} = -\vec{\Omega}_T$. Этот результат можно легко понять. Обычно эффекты, связанные с h_{00}, можно свести к эффектам ускорения с помощью ПЭ. В данном случае это тоже так. Рассмотрим гироскоп на спутнике, движущемся со скоростью $\vec{v}$ и ускорением $\dot{\vec{v}}$ вокруг Земли. Поместим другой гироскоп на Земле. В системе спутника поля тяготения нет, гироскоп на Земле движется с точки зрения наблюдателя на спутнике со скоростью $-\vec{v}$ и ускорением $-\dot{\vec{v}}$ под действием внешней силы (давления опоры). Поэтому ось гироскопа на Земле должна с точки зрения наблюдателя на спутнике прецессировать с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_T = \frac{1}{2} \left[(-\vec{v}) \times (-\dot{\vec{v}}) \right] = \frac{1}{2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}}) \, .$$

Соответственно наблюдатель на Земле интерпретирует это явление как прецессию гироскопа на спутнике с угловой скоростью $-\vec{\Omega}_T = \frac{1}{2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})$, что совпадает с результатом, полученным ранее.

В заключение сделаем численную оценку. Для круговой орбиты радиусом R угол поворота за виток равен

$$\alpha = \Omega T = \frac{3}{2} \omega R \, \frac{M_\oplus}{R^2} \, \frac{2\pi}{\omega} = 3\pi \, \frac{M_\oplus}{R} = \frac{3}{2} \pi \, \frac{r_{g\oplus}}{R} \quad . \qquad (158)$$

Для спутника на орбите, близкой к Земле, это дает $\alpha = 0{,}7 \cdot 10^{-8}$ рад $= 1{,}4 \times 10^{-3}{}''$. Предполагается, что опыт будет поставлен на спутнике, который должен вращаться около года. Число оборотов за год равно примерно $3\cdot10^7/5\times$ $\times10^3 = 0{,}6\cdot10^4$, и так как эффект накапливается, то угол отклонения оси гироскопа за год составит $\sim 9''$. Обеспечить стабильность гироскопа с такой точностью, очевидно, нелегко, еще труднее удержать эту точность стабилизации в течение долгого времени. Поэтому подготовка опыта ведется уже более двух десятилетий. Формула (157) была получена в 1921 г. Фоккером. При выводе этой формулы мы существенно использовали результаты работ [35, 36].

4.11. Прецессия перигелия и необходимость более точного знания метрики

Нам осталось рассмотреть еще один классический эффект ОТО -- прецессию перигелия планеты в поле центральной звезды массой m. Легко увидеть, что для этого необходимо знать метрику поля, создаваемого центром притяжения, с точностью лучшей, чем та, которая дается первым порядком теории возмущений (см. (76)).

Траектория пробного тела единичной массы получается из вариационного принципа

$$-\delta\int ds = -\delta\int\sqrt{g_{00}+g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}\,dt\,. \qquad (159)$$

В ньютоновском приближении $g_{00} = 1 - r_g/r$, $g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$, и из формулы (159) после разложения корня приходим к нерелятивистскому уравнению движения, дающему кеплеровскую орбиту. Если мы хотим найти следующее приближение, то нужно учесть, что для замкнутой траектории в силу теоремы вириала $v^2 \sim r_g/r$. Нерелятивистское приближение соответствует учету членов порядка r_g/r. В следующем порядке мы должны учесть как члены порядка r_g/r, так и члены порядка $(r_g/r)^2$. Если представить метрику в виде

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} + \gamma\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 + \ldots\,,$$

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{r_g}{r}\right) + \ldots\,,$$

то в действии нужно оставить члены

$$S = -\int\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} + \gamma\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 - v^2 - v^2\frac{r_g}{r}}\,dt\,.$$

Разлагая корень, нужно учесть члены порядка $\frac{r_g}{r}$ и $\left(\frac{r_g}{r}\right)^2$:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{r_g}{r}\,; \quad \frac{1}{8}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{r_g}{r}\right)^2 + \gamma\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 + v^2\frac{r_g}{r}\,.$$