жен вращаться около года. Число оборотов за год равно примерно $3\cdot 10^7/5\times$ $\times 10^3 = 0{,}6\cdot 10^4$, и так как эффект накапливается, то угол отклонения оси гироскопа за год составит $\sim 9''$. Обеспечить стабильность гироскопа с такой точностью, очевидно, нелегко, еще труднее удержать эту точность стабилизации в течение долгого времени. Поэтому подготовка опыта ведется уже более двух десятилетий. Формула (157) была получена в 1921 г. Фоккером. При выводе этой формулы мы существенно использовали результаты работ [35, 36].

4.11. Прецессия перигелия и необходимость более точного знания метрики

Нам осталось рассмотреть еще один классический эффект ОТО -- прецессию перигелия планеты в поле центральной звезды массой m. Легко увидеть, что для этого необходимо знать метрику поля, создаваемого центром притяжения, с точностью лучшей, чем та, которая дается первым порядком теории возмущений (см. (76)).

Траектория пробного тела единичной массы получается из вариационного принципа

$$-\delta\int ds = -\delta\int\sqrt{g_{00}+g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}\,dt\,. \qquad (159)$$

В ньютоновском приближении $g_{00}=1-r_g/r$, $g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}$, и из формулы (159) после разложения корня приходим к нерелятивистскому уравнению движения, дающему кеплеровскую орбиту. Если мы хотим найти следующее приближение, то нужно учесть, что для замкнутой траектории в силу теоремы вириала $v^2\sim r_g/r$. Нерелятивистское приближение соответствует учету членов порядка r_g/r. В следующем порядке мы должны учесть как члены порядка r_g/r, так и члены порядка $(r_g/r)^2$. Если представить метрику в виде

$$g_{00}=1-\frac{r_g}{r}+\gamma\left(\frac{r_g}{r}\right)^2+\ldots\,,$$

$$g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}\left(1+\frac{r_g}{r}\right)+\ldots\,,$$

то в действии нужно оставить члены

$$S=-\int\sqrt{1-\frac{r_g}{r}+\gamma\left(\frac{r_g}{r}\right)^2-v^2-v^2\frac{r_g}{r}}\,dt\,.$$

Разлагая корень, нужно учесть члены порядка $\frac{r_g}{r}$ и $\left(\frac{r_g}{r}\right)^2$:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{r_g}{r}\,;\quad \frac{1}{8}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{r_g}{r}\right)^2+\gamma\left(\frac{r_g}{r}\right)^2+v^2\frac{r_g}{r}\,.$$

Несколько небрежно можно сказать, что прецессия перигелия возникает из-за трех причин: кривизны трехмерного пространства, наличия члена, пропорционального γ, в метрике и эффектов частной ТО, приводящих к появлению члена $\left(\frac{v^2}{2}+\frac{r_g}{r}\right)^2$ (он появился бы даже для свободной частицы из-за релятивистской зависимости массы от скорости).

Выше отмечалось (разд. 3.4), что член, пропорциональный γ, связан с нелинейностью гравитационного поля. Поэтому явление прецессии перигелия уникально — оно позволяет непосредственно проверить нелинейность теории Эйнштейна, существенно отличающую ее от теории Ньютона.

Решить задачу о прецессии перигелия можно двумя путями: либо по теории возмущений (как это сделал впервые Эйнштейн), либо найдя сначала точное решение для метрики сферически симметричного тела, найденной Шварцшильдом. Зная решение Шварцшильда, можно затем с его помощью вычислить прецессию перигелия, а также и все другие уже обсуждавшиеся выше эффекты ОТО.

5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТО ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ И ПРЕЦЕССИЯ ОРБИТ

5.1. Вариационный принцип для уравнений ОТО

В заключительной главе этой книги мы рассмотрим точное решение уравнений ОТО в пространстве, окружающем массивное тело — так называемое решение Шварцшильда. С помощью найденного решения мы получим затем выражение для прецессии орбиты планеты в поле массивной звезды.

Одним из способов получения решения Шварцшильда является непосредственное использование вариационного принципа, из которого следуют уравнения ОТО. Этот вопрос представляет и самостоятельный интерес.

Прежде всего, следует записать вид действия для ГП и материи. Будем искать полное действие в виде

$$S = S_g + S_m \quad . \tag{160}$$

Для определенности материю будем считать пылевидной, тогда

$$S_m = -\sum_A m_A \int ds \tag{161}$$

есть сумма действий для материальных частиц массой m_A. Такое выражение для одной частицы уже использовалось для получения уравнений движения материальной точки в ГП (6). Действие S_m уже содержит взаимодействие частицы с ГП, и введение особого члена для взаимодействия в полное действие излишне.