4.2. Часы в гравитационном поле и красное смещение

Пусть в гравитационном поле по произвольной мировой линии движутся стандартные часы. Под этим мы подразумеваем часы, про которые известно, что они показывают "время Минковского", если они находятся вне гравитационного поля, т.е. то время, которое входит в выражение для интервала частной ТО

$$ds^2 = dt^2 - dx^\alpha - dx_\alpha \ . \tag{103}$$

Очевидно, что атомные часы (синхронизованные атомными колебаниями) есть стандартные часы. Действительно, уравнение эволюции для атома есть уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \ , \tag{104}$$

где $\hat{H}$ не зависит от времени и t по определению есть та же переменная, что и в (103). Тогда из (104) следует, что для данного уровня

$$\psi = e^{i\omega_k t} \psi' \ , \tag{105}$$

где ψ' не зависит от t. Атомные часы, в конечном счете, управляются фазой $\omega_k t$, точнее, разностью фаз $(\omega_k - \omega_n)t$ при каком-то переходе, причем ω_k, ω_n зависят только от констант $\hbar$, c, m, α. Выбор единицы времени делается раз и навсегда и определяет стандарт частоты. Из определения следует, что все часы, синхронизованные одним и тем же атомным переходом и покоящиеся в одной системе отсчета частной ТО, идут одинаково.

Пусть теперь часы находятся в гравитационном поле. Тогда справедлива очевидная теорема: показываемое часами время τ определяется соотношением

$$\tau_A - \tau_B = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{ik}\, dx^i dx^k} \ , \tag{106}$$

где интервал берется по мировой линии движения.

Для доказательства рассмотрим в данной точке P на линии AB систему координат, скорость и ускорение которой такие же, как у часов. Если даже часы не движутся по геодезической и система не является L-системой, тем не менее, можно ввести в точке P систему координат x^i, для которой

$$g'_{ik}(P) = \eta_{ik} \tag{107}$$

с точностью до членов $\partial g_{ik}/\partial x^l$. Пусть размер часов есть a, тогда с той точностью, с какой можно пренебречь величиной

$$\left|\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right| a \quad , \tag{108}$$

можно считать, что часы находятся в плоском пространстве. Это значит, что число периодов, отсчитываемое ими, пропорционально $d\tau$, где $d\tau$ – дифференциал времени в выбранной нами системе координат. Иначе говоря, часы отсчитывают время $d\tau$ в метрике (107), где $ds^2 = d\tau^2 - (dx^\alpha)^2$. По предположению, часы в этой системе покоятся, поэтому $ds^2 = d\tau^2$. Время, отсчитываемое часами при движении по AB, есть теперь $\int d\tau = \int ds$. Для атомных часов величина a – порядка атомных размеров, но вообще рассуждение справедливо всегда. Если часы движутся по геодезической, то характерным параметром будет уже

$$\left|\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l\, \partial x^m}\right| a^2 \quad . \tag{109}$$

Из полученных выше решений для слабых полей видно, что в поле, создаваемом покоющимся в данной системе отсчета телом, интервал имеет вид

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \quad , \tag{110}$$

причем g_{00}, $g_{\alpha\beta}$ не зависят от времени, форма $-g_{\alpha\beta}$ положительно определена, компоненты $g_{0\alpha}$ равны нулю и

$$0 < g_{00} < 1 . \tag{111}$$

Рассмотрим теперь произвольные поля, удовлетворяющие всем этим условиям. Такие поля называются статическими. Допустимы любые преобразования вида

$$x'^\alpha = f(x^\beta) \quad , \tag{112}$$

и условие $g_{00} < 1$ сохраняется при преобразовании (112). В теории возмущений $g_{00} = 1 - \frac{2}{r} < 1$. Переменную t в (110) назовем мировым временем.

Рассмотрим в поле (110) атом, излучающий цуг волн. Время, отсчитываемое в той же точке часами,

$$\Delta\tau = \sqrt{g_{00}}\, \Delta t \quad . \tag{113}$$

Если ω_0 – характерная частота колебаний, то измеряемая часами фаза есть $\omega_0 \Delta\tau = \omega_0 \sqrt{g_{00}}\, \Delta t = \omega \Delta t$. Таким образом, частота ω, измеренная в мировом времени, равна $\omega = \omega_0 \sqrt{g_{00}}$. Далеко от источников поля $g_{ik} \to \eta_{ik}$ при $|x^\alpha| \to \infty$ и $\omega \to \omega_0$, как и следовало ожидать.

Покажем, что при распространении волн частота ω сохраняется. Действительно, из принципа эквивалентности следует, что в гравитационном поле справедливо основное уравнение геометрической оптики – уравнение эйконала:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=0 , \qquad (114)$$

где S — эйкональная функция, определяющая фазу волны $\Phi\sim e^{iS}$, и для метрики (110) $g^{00}=1/g_{00}$, $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}$. Так как g^{ik} не зависит от t , то решение уравнения (114) имеет вид $S=S'(x^{\alpha})-\omega t$, где ω не зависит от t (в общем случае, по определению, $\omega=-\frac{\partial S}{\partial t}$). В действительности сохранение частоты справедливо и за пределами геометрической оптики — это просто очевидное следствие статичности метрики (во времени t!). В силу этого волновое уравнение должно приводить к тому, что число волн, проходящих через любые две точки А и В за равные во времени t интервалы времени, должно быть одинаковым — "по дороге" они пропадать не могут, это означало бы нестатичность. Отсюда следует, что волна, излученная атомом, находящимся в точке А гравитационного поля (вблизи массивного тела), будет в мировом времени всюду иметь частоту

$$\omega=\omega_0\sqrt{g_{00}} , \qquad (115)$$

в то время как на бесконечности, где $g_{00}=1$, частота той же линии перехода будет равна просто ω_0 . Так как вблизи тел $g_{00}<1$, то частота данной линии уменьшается, если атом находится рядом с массивным телом. Это и называется красным смещением. Можно получить доказательство справедливости условия $g_{00}<1$ для любых статических полей [34] .

В слабом поле, учитывая, что $g_{00}=1+2\varphi$, получаем:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\varphi ; \quad \frac{\Delta T}{T_0}=-\varphi . \qquad (116)$$

Для того чтобы наблюдать этот эффект, нужны массивные тела. Для Солнца $\varphi_{\odot}=-2\cdot10^{-6}$. Наблюдения осложнены доплеровским смещением, которое дает сдвиг частоты, в три раза больший. Детальный анализ опытных данных дает:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{эксп}\Bigg/\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{теор}=1{,}05\pm0{,}05 . \qquad (117)$$

Для белых карликов эффект возрастает в 10—100 раз, так как их радиус во столько же раз меньше. Например, для спутника Сириуса В: $\varphi=-(2{,}8\pm 0{,}1)\cdot10^{-4}$; $\Delta\nu/\nu=-(3{,}0\pm0{,}5)\cdot10^{-4}$, для Эридана В: $\varphi=-(5{,}7\pm1{,}0)\cdot10^{-5}$; $\Delta\nu/\nu= -(7{,}0\pm1{,}0)\cdot10^{-5}$.

Однако самые точные измерения проведены на Земле (Паунд и Снайдер). Идея опыта в следующем. Излучатель квантов находился на башне высотой $H\approx 20$ м, приемник γ-квантов — внизу, так что смещение было фиолетовым. Легко увидеть, что величина смещения определяется формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{gH}{c^2}=2\cdot10^{-15} .$$

Для измерений использовалось мессбауэровское резонансное поглощение на Fe^{57}. Несмотря на чрезвычайную трудность опыта, была достигнута точность

$$\frac{\Delta \nu_{эксп}}{\Delta \nu_{теор}} = 1{,}00 \pm 0{,}01 .$$

С середины 70-х годов наступила новая эра для экспериментов по красному смещению. Это связано с развитием стандартов частоты сверхвысокой стабильности порядка $10^{-15} \div 10^{-16}$ при временах усреднения от 10 до 100 с и более. Благодаря этому удалось зафиксировать разницу в показаниях часов, совершающих длительный полет на самолете на высоте $\sim 10^4$ м с аналогичными часами на поверхности Земли, а также уследить за смещением частоты в зависимости от высоты при запуске водородных мазерных часов на ракете на высоту до 10 000 км. Во всех случаях согласие с предсказаниями ОТО было лучше, чем 1 %.

4.3. О смысле переменной времени в статической метрике

При рассмотрении эффекта красного смещения мы ввели переменную t и назвали ее мировым временем. При этом t определена неявно тем, что интервал имеет вид (110), где g_{ik} не зависит от t. Покажем, что этим требованием t определено в данной системе отсчета (при выбранных x^α) с точностью до линейного преобразования $t' = at + b$. Действительно, в случае общего преобразования $t = f(x^\alpha, t')$ имеем: $dt = f_{t'}\, dt' + f_\alpha\, dx^\alpha$,

$$ds^2 = g_{00} f_{t'}^2\, dt'^2 + 2 g_{00} f_{t'} f_\alpha\, dt'\, dx^\alpha + (g_{\alpha\beta} + f_\alpha f_\beta)\, dx^\alpha dx^\beta .$$

Если мы хотим, чтобы $g'_{0\alpha} = 0$, то $f_\alpha = 0$ и, следовательно, $f = f(t')$. Из $\partial g'_{00}/\partial t' = 0$ следует, что $f_{t'} = const$ и $f = at' + b$. Таким образом, условия, наложенные на g_{ik}, жестко определяют переменную t (с точностью до масштаба и начала отсчета).

Останется ли поле статическим, если перейти к другой системе отсчета? По-видимому, в общем случае это не так. Пространство Минковского однородно, в нем возможны преобразования $x^{i} = \Lambda^{i}_{k}\, x^{k}$, при которых $\Lambda^{\beta}_{0} = 0$. Но при наличии масс, по-видимому, любой переход к другой системе отсчета приводит к зависящим от времени g_{ik} либо (при преобразованиях типа вращения) к появлению $g_{0\alpha}$-компонент, и метрика становится уже нестатической. Заметим, что статическая метрика – это довольно частный случай. Ее простейшая реализация – поле жестко скрепленных тел. Если тело или тела несферичны, то это поле может быть сложным. Если тела двигаются, то теряется статичность. Уже само движение планет в Солнечной системе нарушает и статичность, и стационарность гравитационного поля, если учесть поле самих планет.

Обсудим, как физически измерить мировое время t в стационарном случае. В метрике (110) скорость света, определяемая уравнением $ds = 0$,