4.5. С какой точностью часы измеряют собственное время?

Как отмечалось выше, утверждение о том, что часы измеряют собственное время, не обязательно рассматривать как отдельный постулат, его можно вывести, считая: 1) часы есть механизм, устроенный так, что с известной точностью он, находясь в пространстве Минковского, совершает циклические движения с неизменной длительностью цикла; 2) уравнения, относящиеся к механике, оптике или квантовой механике и описывающие часы, общековариантны.

Ниже мы обсудим этот вопрос более подробно и покажем, что такая точка зрения позволяет пойти дальше и для любых конкретных часов указать, с какой точностью справедливо утверждение о том, что часы измеряют интервал времени $\tau_{AB} = \int_A^B ds$, взятый по их мировой линии от точки A до точки B. В частности, мы покажем, что для часов, синхронизованных атомными колебаниями и находящихся на краю Солнца, это утверждение справедливо с точностью 10^{-80}.

Заметим, что уже предположение 1) само не следует рассматривать как постулат. Оно может быть выведено, как только описана конструкция часов и сделано предположение, что законы физики лоренцинвариантны. Действительно, рассмотрим, например, простейшие часы – линейку с зеркалами на концах. Перейдем в систему отсчета, где линейка покоится. Тогда "вещество", из которого она состоит, по основной гипотезе описывается лоренцинвариантными уравнениями (для наглядности, будем говорить – уравнением Дирака, хотя это и не совсем точно, так как кроме электронов есть ядра и задача многочастичная).

В уравнение Дирака входят переменные x, y, z, t – "координаты электронов", "координаты ядер" и время, когда электрон проходит через точку (x, y, z). Кроме того, в него входят постоянные: e – заряд, m_e – масса, $\hbar$ – постоянная Планка и c – скорость света (которую мы положим равной 1). Считая линейку кристаллом, мы, в принципе, можем "рассчитать" ее и получить (уложив линейку вдоль оси x так, чтобы начало находилось в точке $x=0$, а конец – в точке $x=L$), что L выражается через число атомов на ребре линейки n и константы формулой типа $L \sim An \dfrac{\hbar^2}{m_e c^2}$, где A – числовая постоянная. Из уравнений Максвелла мы теперь получим, что "время" t между двумя отражениями импульса света от зеркала в точке $x=0$ есть $\Delta T = 2L$, т.е. опять выражается через универсальные постоянные. Таким образом, мы показали, что наша линейка измеряет координатную длину x, а часы – координатное время t.

Теперь можно построить обычную трехмерную сетку из ортогональных линеек и часов, затем, предполагая выполненными уравнения Максвелла, синхронизировать часы и, таким образом, интерпретировать те величины, которые раньше формально входили в уравнения как координаты и время событий.

Пользуясь формальной лоренцинвариантностью уравнений материи, можно теперь перейти в другую систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ относительно первой. Координаты x', y', z', t' в этой системе будут связаны со старыми координатами преобразованиями Лоренца.

Пусть теперь наши световые часы движутся со скоростью $\vec{v}$ относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Тогда в системе покоя они измеряют время t_1-t_2 между нулевым и n-м отражениями. В силу лоренцинвариантности для любой другой системы отсчета будем иметь:

$$(t_1-t_2)^2=(t_1'-t_2')^2-(\vec{r}_1'-\vec{r}_2')^2=s^2 , \tag{124}$$

т.е. мы получили, что наши часы "измеряют интервал".

Пусть теперь световые часы движутся по произвольной мировой линии. Для простоты будем считать, что линейка ускоряется вдоль оси x с постоянным ускорением g. Свяжем с линейкой ускоренную систему отсчета. Тогда на конец линейки в точке L действует потенциал $\varphi=-gL$. В результате длина линейки изменится на величину $\delta L\sim\frac{\rho g}{B}L$, где ρ – плотность линейки, B – модуль Гука. Теперь уже утверждать, что наши часы показывают то же время $\Delta S=2L$, можно лишь с той точностью, с какой справедливо условие $\frac{\rho g}{B}\ll 1$. Если это условие выполнено, то с этой точностью число отсчетов (отражений) будет пропорционально интегралу

$$\tau_A-\tau_B=\int_A^B ds , \tag{125}$$

взятому между точками A и B на четырехмерной траектории часов.

Подобные же рассуждения можно провести и для случая ОТО. Не будем сначала рассматривать конкретную модель часов. Пусть имеются какие-то часы, движущиеся по мировой линии AB. Пока мы не предполагаем, что переменные x^i в римановой метрике как-то интерпретированы. Допустим теперь, что вещество, из которого сделаны часы, описывается ковариантными уравнениями. Введем математическую систему координат, движущуюся вместе с часами. Тогда всегда можно выбрать координаты так, что часы размера l будут покоиться в течение координатного времени ΔT в начале координат, причем

$$g_{ik}(0)=\eta_{ik} , \tag{126}$$

но $\partial g_{ik}/\partial x^\alpha\neq 0$. Фактически мы принимаем мировую линию часов за ось времени, а остальные три ортогональные направления принимаем за пространственные оси. С точностью до величин $\partial g_{ik}/\partial x^\alpha\cdot l$ мы можем теперь считать, что часы находятся в пространстве с метрикой Минковского. Общековариантные, по предположению, уравнения материи переходят в уравнения в плоском пространстве и период ΔT часов (время одного циклического движения) выражается через универсальные постоянные.

В силу (126) имеем $\Delta s^2 = \Delta\tau^2$ и, таким образом, снова убеждаемся, что часы измеряют Δs, а для движения в целом число отсчетов будет пропорционально $\int_A^B ds$.

Разумеется, точность будет наилучшей, если часы в ОТО движутся по геодезической, так как в этом случае в системе, связанной с часами, не только $g_{ik} = \eta_{ik}$, но и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0$. Рассмотрим в этом случае конкретную модель часов, а именно часы, синхронизованные атомными колебаниями и падающие в поле Солнца. Для простоты будем говорить о частоте данного уровня для одного электрона. Сам атом рассмотрим в нерелятивистском приближении. Тогда в системе, связанной с ядром, можно считать:

$$ds^2 = g'_{00}\, dt'^2 - (d\vec{r}\,')^2 , \qquad (127)$$

где $g'_{00} = 1$ в точке, где находится ядро, и при расчете точности наших часов достаточно учесть отклонение g_{00} от 1 для электрона. Вопрос о том, с какой точностью наши атомные часы измеряют ds, очевидно, эквивалентен вопросу, насколько меняется частота атомного перехода (при выборе времени t' !) из-за того, что $g_{00} \neq 1$ для всего атома. Для вычисления перейдем к уравнению Шредингера, включив в него, кроме атомного потенциала V, потенциал тяготения φ' в системе ядра, $g'_{00} = 1 + 2\varphi'$. Тогда частота ω' в этой системе определяется из уравнения

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \omega'\psi = -\frac{1}{2m}\Delta\psi + (V + m\varphi')\,\psi = 0 . \qquad (128)$$

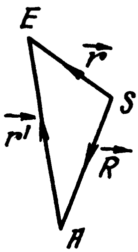

Рис. 4

Выберем начало координат $\vec{r}\,'$ в ядре атома (точка A на рис. 4). В нерелятивистском приближении $g'_{00} = 1 + 2\varphi'$. Наряду со штрихованной системой координат, связанной с ядром, понадобится также система, связанная с Солнцем, в которой

$$ds^2 \approx (1 + 2\varphi)dt^2 - d\vec{r}^{\,2} .$$

Радиус-вектор ядра в этой системе обозначим $\vec{R}$, а радиус-вектор электрона $\vec{R} + \vec{r}$. Тогда $\varphi = -\frac{r_g}{|\vec{R} + \vec{r}\,|}$, где r_g – гравитационный радиус Солнца. В первом приближении можно пренебречь $\vec{r}$ и считать $\varphi = \varphi(\vec{R}) = const$. Тогда, вводя

$$t' = \sqrt{1 + 2\varphi(\vec{R})}\; t , \qquad (129)$$

получим, что $ds^2 = dt'^2 - d\vec{r}^{\,2}$. Это значит, что $\varphi' = 0$, и из уравнения (128) фаза

$$\omega' t = \omega_0 t' , \qquad (130)$$

где ω_0 – атомная частота, выраженная через константы α, m_e, $\hbar$. Именно фазу, пропорциональную числу периодов, измеряют часы, так что из формулы (129) мы вновь получаем формулу для красного смещения.

В следующем приближении получим:

$$\varphi(\vec{R}+\vec{r}) = \varphi(\vec{R}) + \frac{\partial\varphi}{\partial R^\alpha} r^\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^\alpha \partial R^\beta} r^\alpha r^\beta .$$

При переходе к системе ядра надо учесть, что ядро движется с ускорением, равным $-\Delta\varphi$, поэтому φ переходит в

$$\varphi + \vec{g}\vec{r} \approx \varphi(\vec{R}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^\alpha \partial R^\beta} r^\alpha r^\beta .$$

Как и ранее, $\varphi(\vec{R})$ убирается переопределением t, так что окончательно для φ' имеем:

$$\varphi' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^\alpha \partial R^\beta} r^\alpha r^\beta . \qquad (131)$$

Оценим теперь, какова погрешность, вызванная отбрасыванием потенциала φ'. Подставляя $\varphi = -\frac{M}{R}$ имеем:

$$\varphi' = \frac{1}{2}\frac{M}{R^3}(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) r^\alpha r^\beta ,$$

где $n_\alpha = \frac{R_\alpha}{R}$. Рассмотрим, насколько φ' сдвинет уровни. В первом порядке по φ' сдвиг уровня n есть $\langle n|\varphi'|n\rangle$, где $\varphi' = C_{\alpha\beta} r^\alpha r^\beta$ и $C_{\alpha\beta}$ преобразуется при вращениях как неприводимый тензор второго ранга. Так как для данного уровня других векторов кроме момента J_α нет, то среднее пропорционально величине $(J_\alpha J_\beta + J_\beta J_\alpha - \frac{2}{3} J_\gamma J_\gamma \delta_{\alpha\beta}) C_{\alpha\beta}$. Если атом не выстроен, т.е. $\langle n|J_\alpha J_\beta|n\rangle = 0$, то величина поправки равна нулю. Во втором порядке возникает поправка вида

$$\delta\omega_n = \sum_{m\neq n} \frac{\langle n|\varphi'|m\rangle\langle m|\varphi'|n\rangle}{E_n - E_m} .$$

Подставляя явно выражение для φ' и учитывая, что $\omega_B \sim \alpha^2 m_e$, $a \sim \frac{1}{m_e \alpha}$, получаем:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \left(\frac{Ma^2}{R^3}\right)^2 \frac{m_e^2}{(m_e\alpha^2)^2} = \frac{1}{\alpha^4}\frac{M^2 a^4}{R^6} . \qquad (132)$$

В системе $G = 1$ $M_\odot = 1{,}47$ км $\approx 1{,}5\cdot 10^5$ см. На краю Солнца $R_\odot \sim 10^{11}$ см, $a \approx 10^{-8}$ см. Таким образом:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \sim 10^{-80} . \qquad (133)$$

Итак, относительные сдвиги частот (измеренные в собственном времени!) составляют величину порядка 10^{-80}, поэтому когда мы, рассматривая красное смещение, полагаем, что частоты, измеренные в собственном времени, не меняются, то точность этого утверждения очень высока.

Полученная оценка близка к оценке Эддингтона [5]. Его рассуждения таковы. Изменение частоты в собственном времени связано с тем, что пространство не является плоским. Мерой этого является скаляр $R^{iklm} R_{iklm}$. "Вряд ли может войти еще какая-нибудь величина, кроме a, характеризующая атом..." . Отсюда из соображений размерности следует, что безразмерный параметр, характеризующий изменение частоты, есть

$$R^{iklm} R_{iklm} a^4 = \left(\frac{Ma^2}{R^3}\right)^2 \sim 10^{-88} \quad . \tag{134}$$

Неточность рассуждения в том, что на самом деле эффект – не чисто геометрический; существенно еще, насколько "жестки" часы. Это свойство характеризует в нашем случае параметр α. Заранее не известно, в какой степени он войдет, и чем он меньше, тем больше разница в оценках. Рассуждение Эддингтона, разумеется, правильно отражает основную роль величины $R^{iklm}R_{iklm}$. Заметим, что для выстроенного атома с неизотропным распределением момента формула (134) вообще не годится.

4.6. Искривление луча света в гравитационном поле

Полученный в разд. 3.3 вид метрики (80) для случая слабого поля позволяет просто вычислить другой наблюдаемый эффект ОТО – отклонение луча света от прямолинейного распространения в поле массивного тела. Вычисления будем проводить, считая параметр $\frac{r_g}{r} \ll 1$. Тогда уравнение движения луча света $ds^2 = 0$ приводит в силу (80) к выражению для координатной скорости луча:

$$v = \frac{dl}{dt} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad . \tag{135}$$

Хотя t и l не являются обычным временем и расстоянием, можно формально решать задачу об изменении направления луча в среде с зависящей от координаты скоростью. Решение в оптике хорошо известно. Воспользуемся принципом Гюйгенса. Пусть A_1, A_2, ... – положение волнового фронта в момент времени t (рис. 5). По определению, линия фронта нормальна к направлению луча света. Предположим также, что плоскость рисунка есть плоскость симметрии, тогда луч всегда остается в этой плоскости. Через интервал времени Δt волна из A_n имеет радиус $R_n = v_n \Delta t$ и положение волнового фронта определяется касательной $A'_1 \ldots A'_n$. Угол поворота волнового фронта $\Delta\alpha$, или, что то же самое, угол поворота луча

$$\Delta\alpha = -\frac{(v_1 - v_n)}{A_1A_n}\Delta t = -\frac{\partial v}{\partial n}\Delta t \quad ,$$