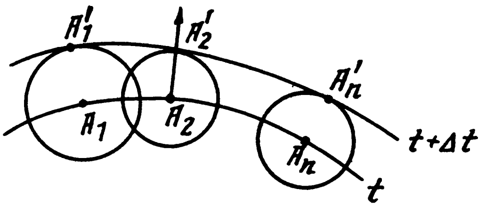


Рис. 5

где производная берется по нормали к лучу (т.е. по фронту) и угол отсчитывается от луча к нормали. Поскольку $\Delta t = \frac{\Delta S}{v}$, где ΔS — расстояние, пройденное по лучу, то

$$\frac{\partial \alpha}{\partial S} = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial n} \quad . \tag{136}$$

Пусть луч света был направлен вначале по оси x, и мы хотим вычислить его отклонение. Считая $v \sim 1$, из (129) имеем:

$$\delta\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} r_g \left(\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}\right) dx = -r_g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\,dx}{(z^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{2r_g}{z} \cdot \tag{137}$$

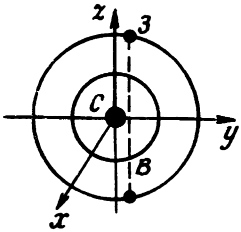
Отсюда с той же точностью

$$\delta\alpha = -\frac{2r_g}{r} \quad . \tag{138}$$

В Солнечной системе этот эффект крайне мал. Даже на краю Солнца $\frac{r_g}{r} \approx 2 \cdot 10^{-6}$, что соответствует $\delta\alpha \approx 1{,}75''$. Вдали от Солнца эта цифра еще меньше. Именно этот факт позволяет нам построить ньютоновскую механику в плоском пространстве: лучи света почти прямые, и астрономы, используя их, методом триангуляции строят, не сталкиваясь с противоречиями, евклидово пространство, в котором движутся планеты, спутники и т.д. При этом последние в основном "чувствуют" Γ^{α}_{00}-компоненту потенциала, которая есть ньютоновская величина $\nabla\varphi$. Это происходит потому, что планеты связаны полем тяготения и для них имеет место теорема вириала $v^2 \sim \varphi$. Таким образом, члены типа $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} v^{\beta} v^{\gamma}$ имеют порядок $\frac{r_g^2}{r^3}$ и пренебрежение ими есть разложение по малому параметру $\frac{r_g}{r}$.

4.7. Запаздывание сигналов в поле Солнца

Рассмотрим эффект запаздывания сигналов в поле Солнца, тесно связанный с эффектом отклонения луча в поле массивного тела. Пусть с Земли посылается радиоимпульс, который отражается от находящейся в противостоянии Венеры и возвращается, пройдя мимо Солнца на расстоянии ρ , где $\rho \sim R_{\odot}$ (рис. 6). В плоском пространстве время прохождения этого пути в одну сторону равно сумме расстояний Земли и Венеры от Солнца $r_В + r_З$ (считается, что $c=1$). Координатная скорость света v , отнесенная к мировому времени, определяется формулой (135), поэтому время распространения равно



$$t=\int_{-r_З}^{r_В}\frac{dz}{1-r_g/r}\ ,$$

Рис. 6

и увеличение этого времени δt по сравнению с $r_В+r_З$ есть

$$\delta t=\int_{-r_З}^{r_В}\frac{r_g}{r}\,dz=r_g\int_{-r_З}^{r_В}\frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\approx r_g\ln\frac{4r_З r_В}{\rho^2}\ . \qquad (139)$$

Здесь r_g — гравитационный радиус Солнца, в см, ρ — прицельный параметр луча.

Заметим, что при сравнении (139) с опытом нужна осторожность, так как часы на орбите показывают не мировое время, а собственное. При небольшой точности этим можно пренебречь. Мировое время распространения сигнала $t_{ЗВ}$ порядка $2r$, где $r\sim r_В\sim r_З$. Интервал t , отсчитанный за это время часами на Земле, равен $(1-r_g/r)\,t_{ЗВ}$, поэтому ошибка, которую мы сделаем, считая, что часы показывают мировое время, равна $r_g t_{ЗВ}/r\sim r_g$. Это мало по сравнению с тем временем запаздывания $\delta t\approx r_g\ln 4r_З r_В/\rho^2$, которое мы хотим измерить, так как $\ln r_З r_В/\rho^2 \gg 1$.

Эффект отчетливо наблюдался. Изменение времени прохождения сигнала вперед и назад, обусловленное полем Солнца, было равно

$$2\delta t=2r_g\ln\frac{4r_З r_В}{\rho^2}=2\cdot 10^{-4}c\ .$$

Измерения для Венеры и спутников с активным отражением дали для величины $R=\delta t_{эксп}/\delta t_{теор}$ значение, близкое к единице (с точностью порядка 1%). В последних экспериментах, проведенных с помощью космического корабля "Викинг", величина ошибки не превышает 0,2% от величины самого эффекта. На сегодняшний день эти опыты представляют собой наиболее точную проверку предсказаний ОТО [13].

Легко видеть, что в действительности рассмотренный здесь тест ОТО и измерения искривления луча света в поле Солнца не независимы. Это не связано с ОТО, а вытекает из геометрической оптики. Действительно, в оптике справедлива формула (136), в которой производная берется по нормали к лучу, α — угол, образуемый лучом с любым фиксированным направлением. Предполагается, что вектор нормали повернут относительно луча на $\pi/2$. При ϑ близких к 1, $\vartheta = 1-\varkappa$, $\varkappa \ll 1$, можно получить из (136) полный угол отклонения

$$\delta\alpha \approx \frac{\partial}{\partial\rho}\int \varkappa\, ds\ , \tag{140}$$

где производная берется по нормали к исходному направлению луча, т.е. по прицельному параметру. С другой стороны, время распространения

$$t_{12} = \int\limits_1^2 \frac{ds}{1-\varkappa} = s_{12} + \int\limits_1^2 \varkappa\, ds\ ,$$

где s_{12} — расстояние. Таким образом, изменение времени, связанное с отличием координатной скорости света от единицы, равно

$$\delta t = \int \varkappa\, ds\,. \tag{141}$$

Сравнивая (140) и (141), мы видим, что

$$\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial\rho}\,(\delta t)\ . \tag{142}$$

Итак, если зависимость δt от ρ известна, то $\delta\alpha(\rho)$ получается дифференцированием по прицельному параметру, и это не зависит от конкретной формы запаздывания. Разумеется, продифференцировав (139) по ρ, мы сразу получаем формулу Эйнштейна (138).

4.8. Вращающиеся системы координат

Рассмотрим вращающуюся в плоском пространстве систему отсчета (диск). В исходном пространстве $ds^2 = dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Пусть ось z направлена по оси вращения, тогда координаты x', y', z' во вращающейся системе отсчета связаны с x, y, z преобразованием

$$\begin{aligned} &z = z'\ ,\\ &x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t\ ,\\ &y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t\ , \end{aligned} \tag{143}$$

где Ω — угловая скорость вращения. Иначе можно записать

$$d\vec{r} = -(\vec{\Omega}\times\vec{r}')\,dt + d\vec{r}\,'\,. \tag{144}$$