но с ОТО, а вытекает из геометрической оптики. Действительно, в оптике справедлива формула (136), в которой производная берется по нормали к лучу, α – угол, образуемый лучом с любым фиксированным направлением. Предполагается, что вектор нормали повернут относительно луча на $\pi/2$. При ϑ близких к 1, $\vartheta = 1-\varkappa$, $\varkappa \ll 1$, можно получить из (136) полный угол отклонения

$$\delta\alpha \approx \frac{\partial}{\partial\rho}\int \varkappa\, ds\ , \tag{140}$$

где производная берется по нормали к исходному направлению луча, т.е. по прицельному параметру. С другой стороны, время распространения

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{1-\varkappa} = s_{12} + \int_1^2 \varkappa\, ds\ ,$$

где s_{12} – расстояние. Таким образом, изменение времени, связанное с отличием координатной скорости света от единицы, равно

$$\delta t = \int \varkappa\, ds\, . \tag{141}$$

Сравнивая (140) и (141), мы видим, что

$$\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial\rho}\,(\delta t)\ . \tag{142}$$

Итак, если зависимость δt от ρ известна, то $\delta\alpha(\rho)$ получается дифференцированием по прицельному параметру, и это не зависит от конкретной формы запаздывания. Разумеется, продифференцировав (139) по ρ, мы сразу получаем формулу Эйнштейна (138).

4.8. Вращающиеся системы координат

Рассмотрим вращающуюся в плоском пространстве систему отсчета (диск). В исходном пространстве $ds^2 = dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Пусть ось z направлена по оси вращения, тогда координаты x', y', z' во вращающейся системе отсчета связаны с x, y, z преобразованием

$$\begin{aligned} z &= z'\ ,\\ x &= x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t\ ,\\ y &= x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t\ , \end{aligned} \tag{143}$$

где Ω – угловая скорость вращения. Иначе можно записать

$$d\vec{r} = -(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,')\,dt + d\vec{r}\,'\, . \tag{144}$$

Переходя к цилиндрическим координатам $\vec{r}' = (\vec{\rho}', z')$ с осью z', направленной вдоль оси вращения, и подставляя (144) в выражение для ds^2, с учетом того, что $\vec{\rho} \perp \vec{\Omega}$, получим:

$$ds^2 = (1 - \Omega^2 \rho^2) dt^2 + 2(\vec{\Omega} \times \vec{r}') d\vec{r}' dt - d\vec{r}'^2. \tag{145}$$

Из выражения (145) для интервала сразу видно, что часы в точке ρ идут медленнее, чем в центре. Это — эффект замедления времени частной ТО. Можно легко убедиться в том, что если с помощью часов и импульсов света измерять длину окружности на диске, то она получится равной не 2π, а $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\Omega^2\rho^2}}$.

Это также очевидно: маленькие стержни, уложенные по кругу, сокращаются по Лоренцу–Фитцджеральду, поэтому их можно уложить больше. Именно с помощью такого мысленного опыта, предложенного, по-видимому, П. Эренфестом, Эйнштейн пришел к выводу о необходимости перейти к общей геометрии Римана в ОТО.

Следует заметить, что вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний $\rho < \frac{1}{\Omega}$, чтобы не нарушилось условие $g_{00} = 1 - \Omega^2\rho^2 > 0$. В противном случае скорость вращения становится больше скорости света и систему отсчета нельзя осуществить с помощью реальных тел.

4.9. Прецессия гироскопа в поле вращающегося тела

Поместим теперь на диске находящийся в кардановом подвесе гироскоп. Он, очевидно, будет вращаться относительно диска с угловой скоростью Ω. Из (145) следует, что

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{g}, \tag{146}$$

где $(\vec{g})_\alpha = g_{0\alpha} = (\vec{\Omega} \times \vec{r})_\alpha$. Из ПЭ мы заключаем, что гироскоп, покоящийся в слабом поле с метрикой, содержащей $g_{0\alpha}$-компоненты, вращается с угловой скоростью (146).

Рассмотрим теперь прецессию гироскопа, покоящегося в поле вращающегося тела. Тривиальное вычисление по общим формулам (76) для h_{ik} в слабом поле вращающегося тела приводит к следующему выражению для компонент $h_{0\alpha} \equiv g_{0\alpha}$:

$$\vec{h} = 2G \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (\vec{h})_\alpha = h_{0\alpha}, \tag{147}$$

где M — момент импульса тела; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, где находится гироскоп (для получения формулы (147) нужно сделать разложение по отношению $\frac{l}{r}$, где l — характерный размер тела). Подставляя в (146), получаем для частоты прецессии