Переходя к цилиндрическим координатам $\vec{r}' = (\vec{\rho}', z')$ с осью z', направленной вдоль оси вращения, и подставляя (144) в выражение для ds^2, с учетом того, что $\vec{\rho} \perp \vec{\Omega}$, получим:

$$ds^2 = (1 - \Omega^2 \rho^2) dt^2 + 2(\vec{\Omega} \times \vec{r}') d\vec{r}' dt - d\vec{r}'^2. \tag{145}$$

Из выражения (145) для интервала сразу видно, что часы в точке ρ идут медленнее, чем в центре. Это — эффект замедления времени частной ТО. Можно легко убедиться в том, что если с помощью часов и импульсов света измерять длину окружности на диске, то она получится равной не 2π, а $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\Omega^2\rho^2}}$. Это также очевидно: маленькие стержни, уложенные по кругу, сокращаются по Лоренцу—Фитцджеральду, поэтому их можно уложить больше. Именно с помощью такого мысленного опыта, предложенного, по-видимому, П. Эренфестом, Эйнштейн пришел к выводу о необходимости перейти к общей геометрии Римана в ОТО.

Следует заметить, что вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний $\rho < \frac{1}{\Omega}$, чтобы не нарушилось условие $g_{00} = 1 - \Omega^2\rho^2 > 0$. В противном случае скорость вращения становится больше скорости света и систему отсчета нельзя осуществить с помощью реальных тел.

4.9. Прецессия гироскопа в поле вращающегося тела

Поместим теперь на диске находящийся в кардановом подвесе гироскоп. Он, очевидно, будет вращаться относительно диска с угловой скоростью Ω. Из (145) следует, что

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{g}, \tag{146}$$

где $(\vec{g})_\alpha = g_{0\alpha} = (\vec{\Omega} \times \vec{r})_\alpha$. Из ПЭ мы заключаем, что гироскоп, покоящийся в слабом поле с метрикой, содержащей $g_{0\alpha}$-компоненты, вращается с угловой скоростью (146).

Рассмотрим теперь прецессию гироскопа, покоящегося в поле вращающегося тела. Тривиальное вычисление по общим формулам (76) для h_{ik} в слабом поле вращающегося тела приводит к следующему выражению для компонент $h_{0\alpha} \equiv g_{0\alpha}$:

$$\vec{h} = 2G \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (\vec{h})_\alpha = h_{0\alpha}, \tag{147}$$

где M — момент импульса тела; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, где находится гироскоп (для получения формулы (147) нужно сделать разложение по отношению $\frac{l}{r}$, где l — характерный размер тела). Подставляя в (146), получаем для частоты прецессии

$$\vec{\Omega} = \frac{G}{r^3}\left(3\vec{n}(\vec{M}\vec{n}) - \vec{M}\right), \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{148}$$

Этот эффект носит название эффекта Лензе-Тирринга.

Как следует из полученной формулы (148), на полюсе $\vec{n}\vec{M} = M$ и $\Omega \sim M$ т.е. вращающееся тело увлекает гироскоп.

Легко увидеть, что частота прецессии

$$\Omega \sim G\,\frac{M}{R^3} \sim G\,\frac{I\omega}{R^3} \sim G\,\frac{m\omega}{R} \sim \frac{r_g}{r}\,\omega\,, \tag{149}$$

где ω – угловая скорость вращающегося тела.

Если считать, что формула (149) применима и для случая сильных полей $(R \sim r_g)$, то получаем, что гироскоп полностью увлекается вращающейся массой, т.е.

$$\Omega \sim \omega\,. \tag{150}$$

Такой же по порядку величины результат получится, если рассматривать массивную оболочку и гироскоп, помещенный внутри нее.

Полученные результаты связаны с очень долгими дискуссиями об относительности (или абсолютности) вращения. Ньютон в "Началах" считал, что вращение абсолютно: если мы вращаем ведерко вместе с водой, то вода должна подниматься к краям, а если ведерко воды не увлекает, то вода не поднимается, – значит, дело не в относительном движении вода-ведро, а в абсолютном движении воды. Мах высказал предположение, что, может быть, если крутить вокруг ведерка всю Вселенную, то вода поднимется. Результат (150) в общем говорит в пользу гипотезы Маха, но точно сформулировать его идеи в рамках ОТО не удается. Может быть, это и невозможно сделать. Правда, самого Эйнштейна эти идеи очень стимулировали в поисках полевой теории тяготения.

4.10. Прецессия гироскопа, движущегося в ГП массивного тела

Прецессия гироскопа, движущегося в ГП массивного тела, называется геодезической прецессией. У такой прецессии есть две причины, и одна из них никак не связана с ОТО, а есть чисто кинематический эффект частной ТО. Оказывается, что в рамках частной ТО гироскоп, центр масс которого движется ускоренно $(\dot{v} \neq 0)$, прецессирует, даже если в системе покоя отсутствуют силы. Такой эффект называется прецессией Томаса. Он, по существу, связан с тем, что преобразования Лоренца с разными направлениями сами по себе не образуют группы $(L(d\vec{v})L(\vec{v}) \neq L(\vec{v}+d\vec{v}))$; левая часть отличается от правой на преобразование вращения.

Для того чтобы вычислить угол томасовской прецессии, рассмотрим пространство скоростей в частной ТО $S(\vec{v})$, точкам которого сопоставим точку, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ относительно данной системы отсчета. Для про-