Несколько небрежно можно сказать, что прецессия перигелия возникает из-за трех причин: кривизны трехмерного пространства, наличия члена, пропорционального γ, в метрике и эффектов частной ТО, приводящих к появлению члена $\left(\frac{v^2}{2}+\frac{r_g}{r}\right)^2$ (он появился бы даже для свободной частицы из-за релятивистской зависимости массы от скорости).

Выше отмечалось (разд. 3.4), что член, пропорциональный γ, связан с нелинейностью гравитационного поля. Поэтому явление прецессии перигелия уникально – оно позволяет непосредственно проверить нелинейность теории Эйнштейна, существенно отличающую ее от теории Ньютона.

Решить задачу о прецессии перигелия можно двумя путями: либо по теории возмущений (как это сделал впервые Эйнштейн), либо найдя сначала точное решение для метрики сферически симметричного тела, найденной Шварцшильдом. Зная решение Шварцшильда, можно затем с его помощью вычислить прецессию перигелия, а также и все другие уже обсуждавшиеся выше эффекты ОТО.

5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТО ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ И ПРЕЦЕССИЯ ОРБИТ

5.1. Вариационный принцип для уравнений ОТО

В заключительной главе этой книги мы рассмотрим точное решение уравнений ОТО в пространстве, окружающем массивное тело – так называемое решение Шварцшильда. С помощью найденного решения мы получим затем выражение для прецессии орбиты планеты в поле массивной звезды.

Одним из способов получения решения Шварцшильда является непосредственное использование вариационного принципа, из которого следуют уравнения ОТО. Этот вопрос представляет и самостоятельный интерес.

Прежде всего, следует записать вид действия для ГП и материи. Будем искать полное действие в виде

$$S = S_g + S_m \quad . \tag{160}$$

Для определенности материю будем считать пылевидной, тогда

$$S_m = -\sum_A m_A \int ds \tag{161}$$

есть сумма действий для материальных частиц массой m_A. Такое выражение для одной частицы уже использовалось для получения уравнений движения материальной точки в ГП (6). Действие S_m уже содержит взаимодействие частицы с ГП, и введение особого члена для взаимодействия в полное действие излишне.

Рассмотрим действие S_g для самого ГП. Оно должно быть выражено в виде инвариантного относительно любых координатных преобразований интеграла, взятого по четырехмерному пространству. Уравнения ГП должны содержать производные от потенциалов поля не выше второго порядка. Роль потенциалов при этом играют компоненты g_{ik}. Так как уравнения поля получаются варьированием действия, то подынтегральное выражение в S_g должно содержать производные от g_{ik} не выше первого порядка. Таким образом, для построения можно использовать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}. Однако из одних только этих величин нельзя построить скаляр (например, путем выбора системы координат можно обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль).

Но в нашем распоряжении есть римановский скаляр R, который, как известно, является инвариантом, поэтому можно рассмотреть действие в виде

$$S_g = A\int R\sqrt{-g}\; d^4x \; . \tag{162}$$

На первый взгляд, такое выражение не годится, так как оно содержит вторые производные от g_{ik}. Однако эти вторые производные входят в R линейно, так что, интегрируя по частям, можно от них избавиться. Поэтому действие (162) фактически удовлетворяет поставленным условиям.

Найдем теперь вариацию δS_g, считая независимыми переменными компоненты g^{ik}: $\delta S_g = A\delta\int R\sqrt{-g}\, d^4x$. Так как

$$R = g^{ik}R_{ik}\; ; \quad R_{ik} = \frac{\partial\Gamma^m_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma^m_{im}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mn} - \Gamma^m_{in}\Gamma^n_{km}\; ,$$

то

$$\delta(R\sqrt{-g}) = R\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\,R_{ik}\,\delta g^{ik} + \sqrt{-g}\,g^{ik}\delta R_{ik}\; . \tag{164}$$

Вычислим вариацию $\delta(\sqrt{-g})$. Так как $g = \det g_{ik}$, то $\delta g = M^{ik}\delta g_{ik}$, где M^{ik} — соответствующий минор. С другой стороны, $g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i$ и компоненты обратного тензора $g^{ik} = M^{ik}/g$, откуда $M^{ik} = g g^{ik}$. Таким образом,

$$\delta g = M^{ik}\delta g_{ik} = g g^{ik}\delta g_{ik} = -g g_{ik}\,\delta g^{ik}\; .$$

Отсюда

$$\delta\,(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-1)\delta g = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g g_{ik}\delta g^{ik} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\,\delta g^{ik}\; .$$

Поэтому первые два члена в $\delta(R\sqrt{-g})$ имеют вид

$$\delta g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\sqrt{-g}\; .$$

Покажем теперь, что

$$\int\delta R_{ik}\,g^{ik}\sqrt{-g}\; d^4x = 0.$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в некоторой точке. Введем в ней геодезическую систему координат $g_{ik} = \eta_{ik}$, $\partial g_{ik}/\partial x^l = 0$, $\Gamma^i_{kl} = 0$. Тогда

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial x^k} .$$

Можно внести g^{ik} под знак дифференцирования, в результате .

$$\delta R_{ik}\, g^{ik}\sqrt{-g} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^m}\left(g^{ik}\delta\Gamma^m_{ik}\right) - \frac{\partial}{\partial x^m}\left(g^{im}\delta\Gamma^n_{in}\right)\right\}\sqrt{-g} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(g^{ik}\delta\Gamma^m_{ik} - g^{im}\delta\Gamma^n_{in}\right)\sqrt{-g} .$$

Величина в скобках является настоящим вектором a^m, так как $\delta\Gamma^m_{ik}$ является настоящим тензором, потому что она определяет разность вариаций для произвольного вектора A^m в метриках g'_{ik} и g_{ik}, $\delta A^m - \delta' A^m = \delta\Gamma^m_{ik} A^i dx^k$, взятую в одной точке. Поэтому вектор a^m определен в любой системе координат (его можно подвергать обычным преобразованиям). Следовательно, в произвольной координатной системе $\frac{\partial a^m}{\partial x^m} \to \frac{Da^m}{Dx^m}$ и

$$\delta R_{ik}\, g^{ik}\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\,\frac{Da^m}{Dx^m} ,$$

где $\frac{Da^m}{Dx^m} = \frac{\partial a^m}{\partial x^m} + \Gamma^m_{nm} a^n$. Учитывая, что

$$\Gamma^m_{nm} = g^{mk}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2} g^{mk}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^n} ,$$

имеем:

$$\frac{Da^m}{Dx^m} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(a^m\sqrt{-g}\right) .$$

Теперь вернемся к нашему интегралу

$$\int \sqrt{-g}\,\frac{Da^m}{Dx^m}\, d^4x = \int \frac{\partial}{\partial x^m}\left(a^m\sqrt{-g}\right) d^4x .$$

Преобразуя его в интеграл по трехмерной поверхности, получаем, что он равен нулю, если $a^m = 0$ на этой поверхности, т.е. если $\delta g^{ik} = 0$ на этой поверхности.

Таким образом, окончательно

$$\delta S_g = P\int \delta g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right)\sqrt{-g}\, d^4x . \qquad (164)$$

Полное действие $S = S_g + S_m$, по определению, обладает свойством $\delta S = 0$, что и должно приводить к уравнениям Эйнштейна. Из (164) видно, что вариация δS_g действительно соответствует левой части этих уравнений. Рассмотрим теперь δS_m и покажем, что эта вариация выражается через тензор энергии-импульса T_{ik} материи. Вид S_m зависит от того, как мы описываем "материю" – это может быть электромагнитное поле, "пыль" частиц, поле Дирака и т.д. Ограничимся простейшей моделью, представляя материю в виде пыли, т.е. совокупности невзаимодействующих массивных частиц, движущихся по геодезическим. Действие для одной частицы нам известно:

$$S_{mA} = -m_A \int ds = -m_A \int \sqrt{g_{ik}\, dx^i dx^k} \,.$$

Тогда

$$\delta S_{mA} = -m_A \delta \int \sqrt{g_{ik}\, dx^i dx^k} = -\frac{1}{2} m_A \int \delta g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} ds =$$

$$= -\frac{1}{2} m_A \int u^i u^k \delta g_{ik}\, ds \,,$$

а для совокупности частиц S_m имеет вид (161) и

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \sum_A \int m_A u^i u^k \delta g_{ik}\, ds \,. \tag{165}$$

Рассмотрим пучок мировых линий частиц. Выделим в этом пучке трубку с поперечным сечением $d\sigma$ (рис. 8), где сечение $d\sigma$ ортогонально к центральной линии. Заметим, что пространство четырехмерно, а $d\sigma$ – трехмерный (пространственный) элемент объема в системе покоя частицы, движущейся по мировой линии AB. Действительно, сечение $d\sigma$ образовано линиями, перпендикулярными AB, поэтому проекция четырехмерной скорости, взятой в сечении $d\sigma$, в это трехмерное пространство равна нулю. Величину $d\sigma$ можно понимать, например, как объем в локально геодезической системе координат.

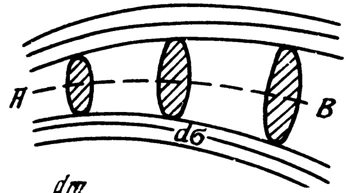

Рис. 8

Введем плотность $\rho = \frac{dm}{d\sigma}$, тогда

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int \delta g_{ik}\, \rho\, u^i u^k\, d\sigma\, ds \,.$$

Геометрически очевидно, что величина $d\sigma ds$ есть инвариантный объем элемента трубки, так что в произвольных криволинейных координатах

$$\int d\sigma\, ds = \int \sqrt{-g}\, d^4x \ .$$

Тогда

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\, d^4x \ , \quad T^{ik} = \rho u^i u^k \ .$$

Переходя к контравариантным компонентам δg^{ik}, имеем:

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int \delta g^{ik}\, T_{ik}\sqrt{-g}\, d^4x \ , \tag{166}$$

где $T_{ik} = \rho u_i u_k$ – обычный тензор энергии-импульса пылевидной материи.

Подставляя формулы (164) и (166) в полную вариацию действия, приходим к уравнениям гравитационного поля

$$A\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) = -\frac{1}{2} T_{ik} \ .$$

Мы видим, что при $A = -\frac{1}{16\pi G}$ вариационный принцип приводит к уравнениям Эйнштейна. Таким образом, эти уравнения и постулат, что $\delta S = 0$, где S имеет вид

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\, d^4x - \sum_A m_A \int ds \ , \tag{167}$$

эквивалентны.

Для других моделей материи нужно действовать таким же образом. Наиболее удобно принять формулу (166) за определение тензора энергии-импульса. При этом нужно показать, разумеется, что так определенный тензор T_{ik} удовлетворяет ковариантному закону сохранения. Удобство такого метода определения тензора T_{ik} в том, что оно, как сразу видно, приводит к симметричному тензору T_{ik} . При этом автоматически получаются уравнения Эйнштейна.

Действие гравитационного поля S_g можно преобразовать к такому виду, чтобы под интегралом содержались бы члены только с первыми производными g_{ik}. Подставляя в S_g явное выражение для скалярной кривизны R , получим:

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G}\left\{\int\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial x^k}\right) g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x + \int\left(\Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mn} - \Gamma^n_{im}\Gamma^m_{kn}\right) g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x\right\}.$$

Интегрируя по частям первый член этого выражения, находим:

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G}\left\{\int\left[-\frac{\partial}{\partial x^m}\left(g^{ik}\sqrt{-g}\right)\Gamma^m_{ik} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ik}\sqrt{-g}\right)\Gamma^m_{im}\right] d^4x + \right.$$

$$+\int \left(\Gamma^m_{ik} \Gamma^n_{mn} - \Gamma^n_{im} \Gamma^m_{kn} \right) g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x \Big\} .$$

Воспользуемся вспомогательными формулами, которые легко выводятся из определения символов Кристоффеля:

$$\Gamma^m_{im} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i}; \qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m} = -g^{in} \Gamma^k_{mn} - g^{kn} \Gamma^i_{mn} . \qquad 168)$$

Тогда

$$-\frac{\partial}{\partial x^m} (g^{ik} \sqrt{-g}) \Gamma^m_{ik} = -g^{ik} \sqrt{-g}\, \Gamma^n_{mn} \Gamma^m_{ik} + \sqrt{-g} (g^{in} \Gamma^k_{mn} + g^{kn} \Gamma^i_{mn}) \Gamma^m_{ik} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ik} \sqrt{-g}) \Gamma^m_{im} = g^{ik} \sqrt{-g}\, \Gamma^n_{kn} \Gamma^m_{im} - \sqrt{-g} (g^{in} \Gamma^k_{nk} + g^{kn} \Gamma^i_{kn}) \Gamma^m_{im} .$$

После подстановки этих выражений в S_g и всех сокращений действие принимает стандартный вид (действие в форме Палатини):

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{ik} (\Gamma^n_{im} \Gamma^m_{kn} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^n_{mn}) , \qquad (169)$$

содержащий только первые производные от g_{ik} .

5.2. Сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна

Ниже будем искать явный вид для сферически симметричного поля в пустом пространстве, применив способ Вейля [3], заключающийся в том, чтобы использовать выражение для действия (169), записав сразу S_g через функции, описывающие интервал, соответствующий сферически симметричному полю, и сохранив условие симметрии при варьировании. Это приводит непосредственно к дифференциальным уравнениям для поля.

Рассмотрим поле, создаваемое статическим сферически симметричным распределением материи в области вне этой материи. Сферическую симметрию можно определить, сказав, что если поместить источник в начале координат O, то можно ввести координаты x^1, x^2, x^3 так, что ds^2 будет переходить сам в себя при преобразованиях, имеющих вид евклидовых вращений. Заметим, что переменные x^1 , x^2 , x^3, конечно, не имеют смысла декартовых координат в евклидовом пространстве. Можно, однако, представить себе, что мы отображаем физическое пространство на евклидово, получая в последнем карту первого. Тогда вращения в физическом пространстве отобразятся во вращения в евклидовом пространстве, т.е. в преобразования обычных координат x_1,