$$+\int\left(\Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mn}-\Gamma^n_{im}\Gamma^m_{kn}\right)g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x\Big\}\,.$$

Воспользуемся вспомогательными формулами, которые легко выводятся из определения символов Кристоффеля:

$$\Gamma^m_{im}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i}\,;\qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}=-g^{in}\Gamma^k_{mn}-g^{kn}\Gamma^i_{mn}\,. \tag{168}$$

Тогда

$$-\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{ik}\sqrt{-g})\Gamma^m_{ik}=-g^{ik}\sqrt{-g}\,\Gamma^n_{mn}\Gamma^m_{ik}+\sqrt{-g}\,(g^{in}\Gamma^k_{mn}+g^{kn}\Gamma^i_{mn})\Gamma^m_{ik}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ik}\sqrt{-g})\Gamma^m_{im}=g^{ik}\sqrt{-g}\,\Gamma^n_{kn}\Gamma^m_{im}-\sqrt{-g}\,(g^{in}\Gamma^k_{nk}+g^{kn}\Gamma^i_{kn})\Gamma^m_{im}\,.$$

После подстановки этих выражений в S_g и всех сокращений действие принимает стандартный вид (действие в форме Палатини):

$$S_g=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,g^{ik}\left(\Gamma^n_{im}\Gamma^m_{kn}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mn}\right), \tag{169}$$

содержащий только первые производные от g_{ik}.

5.2. Сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна

Ниже будем искать явный вид для сферически симметричного поля в пустом пространстве, применив способ Вейля [3], заключающийся в том, чтобы использовать выражение для действия (169), записав сразу S_g через функции, описывающие интервал, соответствующий сферически симметричному полю, и сохранив условие симметрии при варьировании. Это приводит непосредственно к дифференциальным уравнениям для поля.

Рассмотрим поле, создаваемое статическим сферически симметричным распределением материи в области вне этой материи. Сферическую симметрию можно определить, сказав, что если поместить источник в начале координат O, то можно ввести координаты x^1, x^2, x^3 так, что ds^2 будет переходить сам в себя при преобразованиях, имеющих вид евклидовых вращений. Заметим, что переменные x^1, x^2, x^3, конечно, не имеют смысла декартовых координат в евклидовом пространстве. Можно, однако, представить себе, что мы отображаем физическое пространство на евклидово, получая в последнем карту первого. Тогда вращения в физическом пространстве отобразятся во вращения в евклидовом пространстве, т.е. в преобразования обычных координат x_1,

x_2, x_3, не изменяющих величины $r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$ обычного расстояния. Из этого определения следует, что в сферически симметричном статическом случае интервал должен иметь вид

$$ds^2=a^2(r)dt^2-b(r)(dx^\alpha)^2-c(r)(x^\alpha dx^\alpha)^2 . \tag{170}$$

Действительно, пусть рассматриваются близкие точки P и P', такие, что $dt=t_P-t_{P'}=0$; $x^\alpha(P)-x^\alpha(P')=dx^\alpha$. Тогда имеются только два вектора x^α и dx^α (в изображающем евклидовом пространстве), из которых можно сконструировать два и только два квадратичных по dx^α скаляра $(dx^\alpha)^2$ и $(x^\alpha dx^\alpha)^2$ и один скаляр, не содержащий dx^α, $r=\sqrt{x^\alpha x^\alpha}$, откуда и следует (170). Заметим, что "векторы" x^α следует рассматривать как находящиеся в изображающем пространстве, где нет понятия ко- и контравариантных векторов, поэтому не нужно требовать ковариантной формы от выражений, подобных (170), и это не приведет к противоречиям, так как система координат уже зафиксирована.

Из (170) видно, что

$$g_{00}=a^2(r), \quad g_{\alpha\beta}=-b(r)\delta^{\alpha\beta}-c(r)x^\alpha x^\beta . \tag{171}$$

Можно подвергнуть координаты преобразованию вида $r=f(r')r'$. Проделав это преобразование с подходящей функцией $f(r')$, можно добиться, чтобы $b=1$. Тогда окончательно метрика примет вид

$$ds^2=a^2(r)dt^2-(dx^\alpha)^2-c(r)(x^\alpha dx^\alpha)^2 , \tag{172}$$

$$g_{00}=a^2(r) \ ; \quad g_{\alpha\beta}=-(\delta^{\alpha\beta}+c(r)x^\alpha x^\beta)$$

и выразится через две неизвестные функции "радиуса".

Для вычисления S_g необходимо найти компоненты Γ^i_{kl}, соответствующие метрическому тензору g_{ik}. Пространственные компоненты символов Кристоффеля равны

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right) .$$

Далее

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}=-c'(r)\frac{x^\alpha x^\beta x^\gamma}{r}-(\delta^{\alpha\gamma}x^\beta+\delta^{\beta\gamma}x^\alpha)c(r).$$

Собирая все члены, находим:

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}=-\frac{1}{2}c'(r)\frac{x^\alpha x^\beta x^\gamma}{r}-\delta^{\alpha\beta}x^\gamma c(r). \tag{173}$$

Теперь необходимо поднять индекс у $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$, так как в формулу (169) входят $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$. Такое поднятие осуществляется с помощью метрического тензора $g^{\alpha\beta}$: $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=g^{\gamma\mu}\Gamma_{\mu,\alpha\beta}$. Найдем компоненты этого тензора и правило действия его на компоненты x^{α}. Для этого заметим, что x^{α} есть собственный вектор $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta}x^{\beta}=-x^{\alpha}-r^{2}c(r)x^{\alpha}=-d^{2}(r)x^{\alpha}, \tag{174}$$

где

$$d^{2}(r)=1+r^{2}c(r). \tag{175}$$

Формула (174) определяет правило действия $g_{\alpha\beta}$ на x^{β}. Умножая (174) на $g^{\gamma\alpha}$, получаем:

$$g^{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta}x^{\beta}=-d^{2}(r)g^{\gamma\alpha}x^{\alpha}=\delta^{\gamma}_{\beta}x^{\beta}=x^{\gamma},$$

откуда

$$g^{\gamma\alpha}x^{\alpha}=-\frac{1}{d^{2}(r)}x^{\gamma}, \tag{176}$$

что определяет действие $g^{\gamma\alpha}$ на x^{α}. Кроме того, $g_{00}=\dfrac{1}{a^{2}(r)}$, так как $g^{00}g_{00}=1$.

Используя формулу (176), находим, что

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}c'(r)\frac{x^{\gamma}x^{\alpha}x^{\beta}}{rd^{2}(r)}+\frac{c(r)}{d^{2}(r)}\delta^{\alpha\beta}x^{\gamma}. \tag{177}$$

Так как рассматривается статический случай, то $\Gamma^{0}_{00}=0$. Другие компоненты Γ^{i}_{kl} равны:

$$\Gamma^{0}_{\alpha\beta}\sim\Gamma_{0,\alpha\beta}=0,\quad \Gamma^{\alpha}_{0\beta}=0, \tag{178}$$

$$\Gamma^{0}_{0\alpha}=\Gamma^{0}_{\alpha0}=g^{00}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{a^{2}}aa'\frac{x^{\alpha}}{r}=\frac{a'}{a}\frac{x^{\alpha}}{r},$$

$$\Gamma^{\alpha}_{00}=g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta,00}=g^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\beta}}\right)=g^{\alpha\beta}\left(-aa'\frac{x^{\beta}}{r}\right)=\frac{aa'}{d^{2}}\frac{x^{\alpha}}{r}.$$

Полученные величины Γ^{i}_{kl} нужно теперь подставить в S_g. Для упрощения выкладок воспользуемся сферической симметрией задачи и вычислим S_g в точке $x^{1}=r$, $x^{2}=0$, $x^{3}=0$. Тогда, как следует из формул (177) и (178), отличны от нуля будут только следующие компоненты Γ^{i}_{kl} :

$$\Gamma^{0}_{10}=\Gamma^{0}_{01}=a'/a,\quad \Gamma^{1}_{00}=aa'/d^{2},\quad \Gamma^{1}_{22}=\Gamma^{1}_{33}=cr/d^{2},$$
$$\Gamma^{1}_{11}=\frac{1}{2}c'\frac{r^{2}}{d^{2}}+\frac{cr}{d^{2}}=\frac{1}{2}\frac{(d^{2})'}{d^{2}}=\frac{d'}{d}. \tag{179}$$

Компоненты метрического тензора в этом случае равны:

$$g_{ik}=\left\{a^2,-d^2,-1,-1\right\},\quad g^{ik}=\left\{\frac{1}{a^2},-\frac{1}{d^2},-1,-1\right\}. \qquad (180)$$

Следовательно,

$$S_g\sim\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{ik}(\Gamma^n_{im}\Gamma^m_{kn}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mn})=\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{a^2}(\Gamma^n_{0m}\Gamma^m_{0n}-\right.$$
$$-\Gamma^m_{00}\Gamma^n_{mn})-\frac{1}{d^2}(\Gamma^n_{1m}\Gamma^m_{1n}-\Gamma^m_{11}\Gamma^n_{mn})-(\Gamma^n_{2m}\Gamma^m_{2n}-\Gamma^m_{22}\Gamma^n_{mn})-$$
$$\left.-(\Gamma^n_{3m}\Gamma^m_{3n}-\Gamma^m_{33}\Gamma^n_{mn})\right\}=\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{a^2}(2\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00}-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10}-\Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11})-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{d^2}(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}+\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10}-\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11}-\Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10})+\Gamma^1_{22}\Gamma^n_{1n}+\Gamma^1_{33}\Gamma^n_{1n}\right\}=$$
$$=\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\left(\frac{1}{a^2}\Gamma^1_{00}-\frac{1}{d^2}\Gamma^0_{10}\right)(\Gamma^0_{01}-\Gamma^1_{11})+2\Gamma^1_{22}\Gamma^n_{1n}\right\}=2\int d^4x\sqrt{-g}\,\Gamma^1_{22}\Gamma^n_{1n}.$$

Так как $\Gamma^n_{1n}=\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^1}=\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial\sqrt{-g}}{\partial r}$,

а также $\sqrt{-g}=\sqrt{-\det g}=\sqrt{a^2d^2}=ad$,

то

$$S_g\sim\int d^4x\,\frac{cr}{d^2}\,\frac{\partial(ad)}{\partial r}\sim\int r^2dr\,dt\,\frac{(d^2-1)}{rd^2}(ad)'=\int r\,dr\,dt\left(1-\frac{1}{d^2}\right)(ad)'.$$

Вводя $u=r\left(1-\frac{1}{d^2}\right)$ и $w=ad$, запишем окончательно действие в виде

$$S_g\sim\int u\,w'\,dr\,dt\,. \qquad (181)$$

Уравнения ГП получаются из условия $\delta S_g=0$. Прежде чем производить вариацию, учтем, что мы предполагаем заранее существование статического решения, т.е. $\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}=\dot g_{ik}=0$. Поэтому сразу можно работать на классе вариаций, для которых $\delta\dot g_{ik}=0$. В этом случае условие $\delta g_{ik}=0$ при $t=t_1=t_2$, при котором выше была доказана эквивалентность вариационного принципа и уравнений тяготения, на первый взгляд нарушено. Очевидно, однако, что эта эквивалентность сохраняется, так как если $\delta g_{ik}=const$, то вклады от поверхностей $t=t_1$ и $t=t_2$, возникающие при интегрировании по частям, сокращаются. Заметим, что аналогичное рассуждение применимо в классической механике. Здесь для системы с распределенным параметром условие $\delta S=0$

приведет в статическом случае к условию $\delta\int U dV = 0$, где U – плотность потенциальной энергии.

Итак, вариационный принцип запишется для статического случая в виде

$$\delta\int r\left(1-\frac{1}{d^2}\right)(ad)'dr = \delta\int u\,w'dr = 0. \tag{182}$$

Заметим, что функция d (175) имеет простой смысл, если перейти к сферическим координатам r, θ, φ, определив их соотношениями $x^1 = r\sin\theta\times$ $\times\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x^3 = r\cos\theta$. В изображающем пространстве это обычные сферические координаты. Рассмотрим вид пространственной части интервала $ds^2 = a^2dt^2 - dl^2$ в этих координатах. Для радиальных смещений имеем:

$$dl^2 = (dx^\alpha)^2 + c(r)(x^\alpha dx^\alpha)^2 = dr^2 + c(r)r^2dr^2 = d^2(r)dr^2.$$

Для смещений dx^α, ортогональных к x^α, величина $x^\alpha dx^\alpha = 0$ и

$$dl^2 = (dx^\alpha)^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

В общем случае

$$ds^2 = a^2(r)dt^2 - d^2(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{183}$$

Таким образом, для перемещений на сфере элемент длины имеет евклидову форму, что связано просто с нашим выбором r, а $d(r)$ определяет длину радиальных элементов dr.

При варьировании S_g надо иметь в виду, что функции $a(r)$ и $d(r)$ независимы и могут варьироваться независимо. Любые две функции от a и d, независимые друг от друга, также могут рассматриваться при варьировании как независимые. Удобно выбрать в качестве варьируемых функций v и w.

Варьируя по u, находим:

$$\int \delta u\, w'dr = 0 \;\rightarrow\; w' = 0.$$

Варьируя по w, находим:

$$\int u\,\delta w'dr = -\int \delta w\, u'dr = 0 \;\rightarrow\; u' = 0.$$

Следовательно, $r\left(1-\frac{1}{d^2}\right) = c_1$, $ad = c_2$.

Линейно меняя шкалу времени $(t' = \beta t)$, можно изменить $a(r)$ на постоянную величину, следовательно, можно положить $c_2 = 1$ и $a = \frac{1}{d}$. Таким образом,

$$d^2(r) = \left(1-\frac{c_1}{r}\right)^{-1}, \quad a^2(r) = 1-\frac{c_1}{r}.$$

Постоянная C_1 находится из сравнения с ньютоновским пределом, где в системе единиц $c=G=1$ $r_g=2m$, $g_{00}=1-\frac{r_g}{r}$. Отсюда $C_1=r_g$, и мы получаем окончательное решение в виде

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{184}$$

Это точное решение уравнений ГП Эйнштейна, справедливое в области вне сферически симметричного распределения масс, было найдено К. Шварцшильдом в 1916 г. Соответственно метрика (184) именуется метрикой Шварцшильда.

При получении этого результата были использованы следующие предположения: 1) сферическая симметрия распределения вещества, создающего ГП; 2) существование статического решения $(\dot{g}_{ik}=0)$; 3) отсутствие в метрике членов с $g_{0\alpha}$. Как показал Биркгоф, предположения 2) и 3) есть следствия уравнений Эйнштейна, если справедливо 1). Поэтому, в частности, полученное решение верно и для изменяющегося распределения масс, если только оно остается сферически симметричным (радиально пульсирующая звезда). Может показаться, что пульсирующая звезда должна излучать гравитационные волны, терять энергию и массу, и тогда m, входящее в (184), должно меняться. Теорема Биркгофа показывает, что это не так, и связано это с тем, что сферически симметричный источник не может излучать гравитационные волны, так же как он не может излучать и электромагнитные волны.

Сразу же отметим, что шварцшильдовская метрика имеет особенность при $r=r_g=2m$. Эта сингулярность несущественна, если размеры звезды достаточно велики. Например, для Солнца $r_{g\odot}=$ 2,95 км, а $R_\odot\approx 0{,}7\cdot 10^6$ км. На краю Солнца $\varphi_\odot\sim 2\cdot 10^{-6}$, а дальше нужно искать уже решение с учетом того, что мы находимся в "почти ньютоновской" ситуации внутри него. В этом случае (для однородного распределения вещества) $\varphi=-\frac{4\pi}{3}G\rho r^2$, потенциал внутри Солнца меньше, чем на краю, и никаких сингулярностей, конечно, нет. Сингулярность может проявиться только тогда, когда радиус тела меньше, чем r_g. В этом случае решение Шварцшильда станет неприменимым при $r=r_g$. Мы отложим обсуждение вопроса о том, как продолжить решение Шварцшильда на область $r<r_g$, до второй части книги. Там же мы обсудим и другие свойства метрики Шварцшильда.

5.3. Прецессия орбит в поле Шварцшильда

В заключение рассмотрим вычисление движения тел в шварцшильдовом поле и получим выражение для упоминавшегося выше эффекта прецессии орбит планет.

Уравнение движения пробного тела в поле Шварцшильда можно получить из вариационного принципа. Действие для пробной частицы единичной массы имеет вид