

Постоянная C_1 находится из сравнения с ньютоновским пределом, где в системе единиц $c = G = 1$ $r_g = 2m$, $g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}$. Отсюда $C_1 = r_g$, и мы получаем окончательное решение в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (184)$$

Это точное решение уравнений ГП Эйнштейна, справедливое в области вне сферически симметричного распределения масс, было найдено К. Шварцшильдом в 1916 г. Соответственно метрика (184) именуется метрикой Шварцшильда.

При получении этого результата были использованы следующие предположения: 1) сферическая симметрия распределения вещества, создающего ГП; 2) существование статического решения ($\dot{g}_{ik} = 0$); 3) отсутствие в метрике членов с $g_{\alpha\alpha}$. Как показал Биркгоф, предположения 2) и 3) есть следствия уравнений Эйнштейна, если справедливо 1). Поэтому, в частности, полученное решение верно и для изменяющегося распределения масс, если только оно остается сферически симметричным (радиально пульсирующая звезда). Может показаться, что пульсирующая звезда должна излучать гравитационные волны, терять энергию и массу, и тогда m , входящее в (184), должно меняться. Теорема Биркгофа показывает, что это не так, и связано это с тем, что сферически симметричный источник не может излучать гравитационные волны, так же как он не может излучать и электромагнитные волны.

Сразу же отметим, что шварцшильдовская метрика имеет особенность при $r = r_g = 2m$. Эта сингулярность несущественна, если размеры звезды достаточно велики. Например, для Солнца $r_{g\odot} = 2,95$ км, а $R_{\odot} \approx 0,7 \cdot 10^6$ км. На краю Солнца $\varphi_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{-6}$, а дальше нужно искать уже решение с учетом того, что мы находимся в "почти ньютоновской" ситуации внутри него. В этом случае (для однородного распределения вещества) $\varphi = -\frac{4\pi}{3} G \rho r^2$, потенциал внутри Солнца меньше, чем на краю, и никаких сингулярностей, конечно, нет. Сингулярность может проявиться только тогда, когда радиус тела меньше, чем r_g . В этом случае решение Шварцшильда станет неприменимым при $r = r_g$. Мы отложим обсуждение вопроса о том, как продолжить решение Шварцшильда на область $r < r_g$, до второй части книги. Там же мы обсудим и другие свойства метрики Шварцшильда.

5.3. Прецессия орбит в поле Шварцшильда

В заключение рассмотрим вычисление движения тел в шварцшильдовом поле и получим выражение для упоминавшегося выше эффекта прецессии орбит планет.

Уравнение движения пробного тела в поле Шварцшильда можно получить из вариационного принципа. Действие для пробной частицы единичной массы имеет вид

$$S = -\int ds, \quad (185)$$

где ds определяется формулой (184).

Введем собственное время τ так, что $ds^2 = d\tau^2$. Тогда

$$S = -\int \frac{ds}{d\tau} d\tau =$$

$$= \int \left\{ \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \right\}^{1/2} d\tau. \quad (186)$$

Производя независимым образом варьирование по переменным t, φ, θ , получим:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0, \quad (187)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = 0, \quad (188)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (189)$$

Варьирование по оставшейся переменной r излишне, так как справедливо уравнение связи $ds^2 = d\tau^2$, т.е.

$$1 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \right]. \quad (190)$$

Из формулы (189) сразу вытекает, что движение пробного тела в поле Шварцшильда плоское. Действительно, выбрав в начальный момент времени $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$, в силу (189) получим, что это будет верно и при любых τ , так как при $n \geq 2$ все производные $\frac{d^n \theta}{d\tau^n}$ рекуррентно выражаются через θ и $\frac{d\theta}{d\tau}$.

Таким образом, полагая $\theta = \frac{\pi}{2}$, находим, что уравнения (187) и (188) будут иметь решения

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = c_1, \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = c_2. \quad (191)$$

Подставляя (191) в (190), приходим к первому интегралу уравнений движения

$$1 = \frac{c_1^2}{(1 - r_0/r)} - \frac{1}{(1 - r_0/r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{c_2^2}{r^2}. \quad (192)$$

Введем новую переменную $u = \frac{1}{r}$, Тогда

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c_2}{r^2} = -c_2 \frac{du}{d\varphi},$$

и уравнение (192) принимает вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2(1 - r_g u) = \frac{c_1^2 - 1}{c_2^2} + \frac{r_g}{c_2^2} u. \quad (193)$$

Смысл постоянных c_1 и c_2 можно понять, сравнив (193) с аналогом этого соотношения в ньютоновском пределе. Как известно, законы сохранения энергии и момента при движении пробного тела с $m=1$ в ГП массивного тела записываются в ньютоновском приближении в виде

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{r_g}{2r} + \frac{M^2}{2r},$$

$$M = r^2 \dot{\varphi}. \quad (194)$$

Отсюда, после замены $u = \frac{1}{r}$, находим:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2E}{M^2} + \frac{r_g}{M^2} u. \quad (195)$$

Очевидно теперь, что при выполнении неравенства $r_g u = \frac{r_g}{r} \ll 1$ (предел слабого поля) константы c_1 и c_2 в (193) должны переходить в соответствующие константы в (195), т.е. $c_2 \rightarrow M$, $c_1^2 - 1 \rightarrow 2E$.

Если мы хотим теперь получить поправку к ньютоновскому закону движения, следует рассматривать слагаемое $r_g u^3$ как малую добавку и заменить (193) на

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2E}{M^2} + \frac{r_g}{M^2} u + r_g u^3. \quad (196)$$

Дифференцируя (196) по φ , приходим, таким образом, к уравнению траектории в слабом шварцшильдовском поле ($r_g = 2m$):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{M^2} + 3m u^2. \quad (197)$$

В нулевом (ньютоновском) приближении соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{d\varphi^2} + u^{(0)} = \frac{m}{M^2}, \quad (198)$$

и его решение, как известно, есть

$$u^{(0)} = \frac{1}{r^{(0)}} = \frac{\pi}{M^2} (1 + e \cos \varphi) \quad (199)$$

(эллиптическая орбита).

Ищем теперь следующее приближение к форме траектории, оставляя справа в уравнении (197) только "резонансный" член, $\sim \cos \varphi$, который и приводит к смещению перигелия орбиты. Тогда

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} + u^{(1)} = 3\pi \frac{m^2}{M^4} 2e \cos \varphi = \frac{6\pi^3 e}{M^4} \cos \varphi. \quad (200)$$

Решение уравнения (200) ищем в виде $u^{(1)} = A(\varphi) \sin \varphi + B(\varphi) \cos \varphi$, где $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ — медленно меняющиеся функции φ . Подставляя в (200), получим, удерживая слева только главные члены:

$$2A' \cos \varphi - 2B' \sin \varphi = \frac{6\pi^3 e}{M^4} \cos \varphi,$$

откуда $B' = 0$, $A' = \frac{3\pi^3 e}{M^4}$ и, следовательно,

$$A(\varphi) = \frac{3\pi^3 e}{M^4} \varphi.$$

Окончательно траектория с точностью до членов порядка $\frac{m^2}{r^2}$ имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{\pi}{M^2} (1 + e \cos \varphi) + \frac{3\pi^3 e}{M^4} \varphi \sin \varphi. \quad (201)$$

Используя то, что добавка к невозмущенной траектории мала ($\frac{m^2}{M^2} \varphi \ll 1$, если планета не сделала слишком много оборотов), можно переписать полученный результат в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{\pi}{M^2} \left[1 + e \cos \left(1 - 3 \frac{m^2}{M^2} \right) \varphi \right]. \quad (202)$$

Это означает, что период по φ равен не 2π (как в ньютоновской теории), а $2\pi \left(1 - 3 \frac{m^2}{M^2} \right)^{-1}$, т.е. то же самое значение r повторится не при $\varphi = 2\pi$, а при $\varphi \approx 2\pi + 6\pi \frac{m^2}{M^2}$, и радиус вернется к своему значению (скажем, соответствующему перигелию) при положении радиус-вектора, повернутом относительно старого вектора перигелия на угол $\delta\varphi = 6\pi \frac{m^2}{M^2}$. Поворот (прецессия) после n -го витка будет

$$\delta\varphi_n = 6\pi n \frac{m^2}{M^2}. \quad (203)$$

Оценим поворот за один виток для орбиты, близкой к круговой. Тогда $M = vR$, $v^2 = \frac{\pi}{R}$ (в силу теоремы вириала) и

$$\delta = \delta\varphi_1 = 6\pi \frac{\pi^2}{v^2 R^2} = 3\pi \frac{r_g}{R}. \quad (204)$$

Как видно, величина прецессии определяется параметром $\frac{\gamma_2}{R}$, характеризующим постньютоновские эффекты ОТО, т.е. отклонения предсказаний ОТО от ньютоновской механики. Напомним, что хотя этот параметр входит в δ в первой степени, на самом деле прецессия перигелия — эффект второго порядка по $\frac{\gamma_2}{R}$, как было пояснено выше.

Из (204) видно, что $\delta \sim \frac{1}{R}$, поэтому эффект больше всего для внутренних планет Солнечной системы. Оценим прецессию перигелия Меркурия. Подставляя $R_\phi = 0,57 \cdot 10^8$ км и период обращения $T_\phi = 0,24$ года, получаем для прецессии за 100 лет $\delta_\phi = 40''/\text{столетие}$. Для более точного вычисления надо учесть эксцентриситет орбиты. Несложные выкладки дают:

$$\delta = \frac{3\pi r_g}{a(1-e^2)} \quad (205)$$

Используя стандартные значения $a_\phi = 0,5791 \cdot 10^8$ км, $e_\phi = 0,2056$, $T_\phi = 0,2408$ лет, $r_{gO} = 2,952$ км (в следующем знаке уже появляется ошибка из-за неточности в определении гравитационной постоянной G), $1 \text{ рад} = 2,0626 \cdot 10^5$, получаем:

$$\delta_\phi = 43,00''/\text{столетие} \quad (206)$$

Имеющиеся данные наблюдений дают по последним обработкам:

$$\delta_1 = (43,11 \pm 0,45)''; \quad \delta_2 = (42,0 \pm 0,5)''$$

Мы видим, что опыт совпадает с теорией с точностью в 1%. Заметим еще, что угол $\delta = 0,5 \cdot 10^{-6}$ рад на оборот при $R \approx 0,6 \cdot 10^8$ км соответствует линейному смещению в 3 км/об. или 12 км/г. Длительные радиолокационные измерения делают вполне возможным измерение расстояния до планет с большой точностью. Радиолокация Меркурия привела к результатам, совпадающим с предсказаниями ОТО с точностью порядка 10%.

Сделаем несколько замечаний по поводу прецессии Меркурия.

1. Наблюдаемая прецессия орбиты Меркурия, на самом деле, гораздо больше — порядка $6 \cdot 10^3''/\text{столетие}$. Это связано с действием планет Солнечной системы. Такое явление было хорошо известно уже в прошлом веке и может быть рассчитано в рамках ньютоновской механики. Расчеты показали, что остается неустранимый остаток $\sim 40''/\text{столетие}$ (в работе Эйнштейна 1915 г. говорится о необъяснимом остатке $(45 \pm 45)''/\text{столетие}$). Расхождение между теорией и наблюдениями считалось несомненным и вызывало большое беспокойство у специалистов по небесной механике.

2. Координаты r , φ , в которых проводились вычисления прецессии перигелия, были определены чисто формально как координаты, возникающие при наложении определенных условий на метрику. В то же время при сравне-

нии теории с наблюдениями эти координаты отождествляют с евклидовыми переменными. Верно ли это? Ответ очевиден: верно, но с определенной точностью. Действительно, найдя движение лучей света в этой же метрике, мы получим стандартный угол отклонения луча $\alpha \sim 2r_g/r$, где r — прицельный параметр. С такой точностью геометрия световых лучей в Солнечной системе является евклидовой (для Меркурия r — радиус орбиты). На первый взгляд, это тот же параметр, который входит в величину δ , так что эти два эффекта одного порядка. Однако, угол δ накапливается со временем, в то время, как угол α — нет. Поэтому если для одного оборота ошибка порядка 1, то за 100 лет (400 оборотов Меркурия) она будет порядка 0,2%. Разумеется, ничто не мешает, в принципе, сделать совместный расчет движения планеты и световых лучей и, вообще, сформулировать ответ на языке локальных наблюдаемых, т.е. установить, на сколько нужно повернуть телескоп, чтобы увидеть планету в перигелии через 100 лет. Конечно, подобная формула содержит неопределенность, связанную с тем, что наблюдательно не определено, что есть перигелий, но нет сомнения, что задача в принципе разрешима.

Такие же проблемы возникают и для гироскопа на спутнике. Прецессия происходит относительно направления, фиксируемого при расчете как направление осей координат (точнее, координат, подвергнутых лоренцовскому бусту, чтобы получить оси сопровождающей спутник системы отсчета). Физически мы должны фиксировать направление по какой-то звезде. Тогда искривление лучей дает эффект того же порядка, что и сама геодезическая прецессия. Возможны два выхода из этого положения. Можно рассчитать оба эффекта и сравнить результат с опытом, формулируя его так: теория предсказывает такое-то поведение для угла между осью телескопа, ориентированного на звезду, и осью гироскопа. Проблема становится проще, когда эффект накапливается — поворот, обусловленный геодезической прецессией, пропорционален числу оборотов. Тогда ошибка $\sim r_g/r$ в определении угла уже незначительна.

В заключение покажем, как можно получить выражение для угла отклонения света в поле массивного тела, исходя из решения уравнений движения в поле Шварцшильда. Уравнение движения лучей света $ds=0$ формально получается из уравнения (197) предельным переходом $M \rightarrow \infty$. Действительно, из (188) следует, что

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} = M, \quad ds = \frac{r^2}{M} d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty.$$

Таким образом, уравнение луча света имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3\pi u^2. \quad (207)$$

Это уравнение справедливо не только в слабом поле, так как такое же уравнение получится из (193) устремлением $c_2 \rightarrow \infty$. Мы, тем не менее, будем счи-

тать поправку справа малой, и рассмотрим луч света, проходящий вблизи поверхности массивной звезды. Решение уравнения нулевого приближения

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{d\varphi^2} + u^{(0)} = 0$$

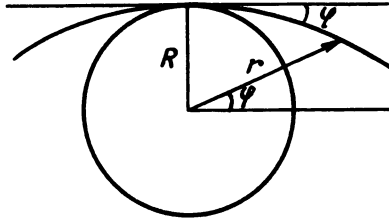


Рис. 9

в подходящих координатах (см. рис. 9) имеет вид прямой линии:

$$u^{(0)} = \frac{1}{R} \sin \varphi .$$

Опять подставляя справа решение нулевого приближения, имеем для поправки:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} + u^{(1)} = \frac{3\pi}{R^2} (1 - \cos^2 \varphi) . \quad (208)$$

Решение этого уравнения

$$u^{(1)} = \frac{3\pi}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) .$$

Таким образом,

$$u = \frac{\sin \varphi}{R} + \frac{3\pi}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) . \quad (209)$$

Когда $u \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$. Считая угол отклонения малым, т.е. заменяя $\sin \varphi \sim \varphi$, $\cos 2\varphi \sim 1$, находим из (209):

$$u \approx \frac{\varphi}{R} + \frac{3\pi}{2R^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\varphi}{R} + \frac{2\pi}{R^2} \rightarrow 0 ,$$

откуда

$$\varphi_\infty = -\frac{2\pi}{R} = -\frac{r_\varphi}{R} .$$

Следовательно, полное отклонение (из соображений симметрии) равно

$$\Delta\varphi = \frac{2r_\varphi}{R} , \quad (210)$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Заметим, что уравнение движения лучей света в поле Шварцшильда (207) имеет и необычное решение:

$$u = \frac{1}{3\pi} \quad , \quad r = 3\pi = \frac{3}{2} r_g \quad , \quad (211)$$

описывающее стационарную орбиту лучей света вокруг массивного тела. Нетрудно показать что это решение неустойчиво.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: В 4 т. М.: Наука, 1965–1966.
 2. Визгин В.П. Релятивистская теория тяготения. Истоки и формирование. 1906–1915. М.: Наука, 1981.
 3. *Weyl H. Raum, Zeit, Materie // Springer, 1923.*
 4. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983.
 5. Эддингтон А. Теория относительности. М.: ОНТИ, 1934.
 6. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
 7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
 8. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. А. Гравитация: В 3 т. М.: Мир, 1977–1978.
 9. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
 10. А. Эйнштейн и теория гравитации: Сборник статей. М.: Мир, 1979
 11. Астрофизика, кванты и теория относительности: Сборник статей. М.: Мир, 1982.
 12. Общая теория относительности: Сборник статей. М.: Мир, 1983.
 13. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоиздат, 1985.
 14. Хоукинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
 15. Биррел Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
 16. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
 17. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
 18. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. М.: Наука, 1986.
 19. Лайтман А., Прайс Р., Пресс В., Тьюкоольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.
 20. *Gödel K. // Rev. Mod. Phys., 1949, 21, 447.*
 21. Воронов Н.А. // Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, 605.
 22. *Morris M., Thorn K., Yartsever U. // Phys. Rev. Lett., 1988, 61, 1446.*
- Новиков И.Д. // ЖЭТФ, 1989, 95, 769.