

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе мы применим дифференциальное и интегральное исчисления к изучению геометрических объектов — кривых и поверхностей. Исследование геометрических образов средствами анализа составляет содержание дифференциальной геометрии.

Рамки этого курса позволяют нам изложить лишь основы дифференциальной геометрии, которая представляет собой обширную науку, тесно связанную с механикой, теорией дифференциальных уравнений и другими дисциплинами.

§ 1. Вектор-функции скалярного аргумента

1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность. Кривые и поверхности удобно задавать функциями, принимающими векторные значения (короче, вектор-функциями). Поэтому мы начнем главу с того, что кратко сформулируем основные понятия анализа применительно к вектор-функциям. Мы можем при этом не входить в подробности, так как нового (по сравнению со случаем скалярных функций) здесь будет немного.

Определение. Пусть каждому значению переменной t , принадлежащему отрезку $[a, b]$, поставлен в соответствие вектор

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Такой вектор называется вектор-функцией скалярного аргумента t .

С вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$ связываются следующие наглядные представления. Если откладывать от начала координат векторы $\mathbf{r}(t)$, отвечающие различным значениям аргумента t , то концы этих векторов составят некоторую кривую — график вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, обычно называемую *годографом* функции $\mathbf{r}(t)$ (рис. 3.1).

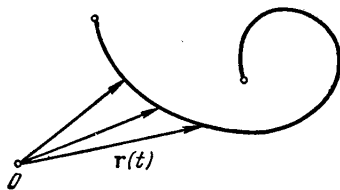


Рис. 3.1.

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе мы применим дифференциальное и интегральное исчисления к изучению геометрических объектов — кривых и поверхностей. Исследование геометрических образов средствами анализа составляет содержание дифференциальной геометрии.

Рамки этого курса позволяют нам изложить лишь основы дифференциальной геометрии, которая представляет собой обширную науку, тесно связанную с механикой, теорией дифференциальных уравнений и другими дисциплинами.

§ 1. Вектор-функции скалярного аргумента

1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность. Кривые и поверхности удобно задавать функциями, принимающими векторные значения (короче, вектор-функциями). Поэтому мы начнем главу с того, что кратко сформулируем основные понятия анализа применительно к вектор-функциям. Мы можем при этом не входить в подробности, так как нового (по сравнению со случаем скалярных функций) здесь будет немного.

Определение. Пусть каждому значению переменной t , принадлежащему отрезку $[a, b]$, поставлен в соответствие вектор

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Такой вектор называется вектор-функцией скалярного аргумента t .

С вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$ связываются следующие наглядные представления. Если откладывать от начала координат векторы $\mathbf{r}(t)$, отвечающие различным значениям аргумента t , то концы этих векторов составят некоторую кривую — график вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, обычно называемую *годографом* функции $\mathbf{r}(t)$ (рис. 3.1).

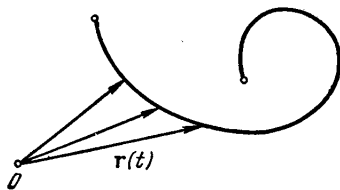


Рис. 3.1.

Если рассматривать аргумент t как время, то годограф функции $\mathbf{r}(t)$ — это траектория движения некоторой точки.

Постоянный вектор

$$\mathbf{R} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

называется *пределом* $\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}| = 0, \quad (3.2)$$

где $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}|$ — длина вектора $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}$. Это условие равносильно трем скалярным условиям:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = c. \quad (3.2')$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда все три ее компоненты — скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывны в точке t_0 . (Докажите это!) Сумма, разность, скалярное и векторное произведения непрерывных вектор-функций непрерывны. (Проверьте это!)

2. Дифференцирование вектор-функции. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *дифференцируемой* в точке t , если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Этот предел называется *производной* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и обозначается символами $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{r}'(t)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t)$. Легко проверить, что существование $\mathbf{r}'(t)$ равносильно существованию трех производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$, причем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ направлен по секущей MM_1 годографа функции $\mathbf{r}(t)$

(рис. 3.2), а направление вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — это направление предельной прямой, к которой стремится эта секущая, когда точка M_1 приближается к M , т. е. направление касательной к годографу в точке M .

Кинематически $\mathbf{r}'(t)$ — это скорость точки, движущейся по закону $\mathbf{r}(t)$.

Для вектор-функции имеют место следующие правила дифференцирования:

- 1) если $\mathbf{r}(t) = \text{const}$, то $\mathbf{r}'(t) = 0$;
- 2) $(k\mathbf{r}(t))' = k\mathbf{r}'(t)$, $k = \text{const}$;

3) $(u(t) \mathbf{r}(t))' = u'(t) \mathbf{r}(t) + u(t) \mathbf{r}'(t)$, $u(t)$ — скалярная функция;

4) $(\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) \pm \mathbf{r}'_2(t)$;

5) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}'_1(t), \mathbf{r}'_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}'_2(t))$;

6) $[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}'_1(t), \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}'_2(t)]$ (здесь необходимо

сохранять порядок сомножителей);

7) если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и $t = t(\tau)$, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

— правило дифференцирования сложной вектор-функции.

Доказательство этих правил мы предоставим читателю.

Отметим следующие частные случаи дифференцирования вектор-функции:

а) *Производная вектора постоянного направления.* Пусть вектор $\mathbf{r}(t)$ имеет постоянное направление (т. е. от t зависит лишь его длина). Тогда векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ коллинеарны. Действительно, в этом случае $\mathbf{r}(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{r}(t) = u(t) \mathbf{e},$$

где $u(t)$ — скаляр, а \mathbf{e} — постоянный вектор, например единичный. Тогда

$$\mathbf{r}'(t) = u'(t) \mathbf{e}, \text{ т. е. } \mathbf{r}'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} \mathbf{r}(t).$$

б) *Производная вектора постоянной длины.* Если $|\mathbf{r}(t)| = \text{const}$, то векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ взаимно ортогональны. Действительно, в этом случае $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = \text{const}$; дифференцируя это равенство, получаем

$$2(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0, \text{ т. е. } (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0,$$

что и требовалось.

Геометрический смысл этого соотношения очень прост. Если $|\mathbf{r}(t)| = R$, то годограф функции $\mathbf{r}(t)$ лежит целиком на сфере радиуса R с центром в начале координат. Касательная к такой кривой лежит в плоскости, касательной к сфере, и, следовательно, перпендикулярна радиусу-вектору $\mathbf{r}(t)$, идущему в точку касания.

Дифференциалом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ называется вектор

$$d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}.$$

Иначе говоря,

$$d\mathbf{r} = x'(t) dt \cdot \mathbf{i} + y'(t) dt \cdot \mathbf{j} + z'(t) dt \cdot \mathbf{k} = \mathbf{r}'(t) dt,$$

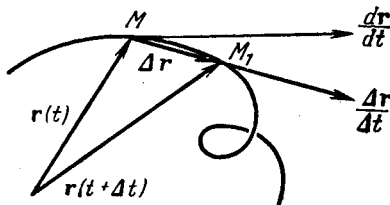


Рис. 3.2.

т. е. дифференциал вектор-функции равен произведению ее производной на дифференциал (т. е. приращение) независимой переменной. Как и в случае скалярной функции, дифференциал $d\mathbf{r}$ вектор-функции отличается от ее приращения $\Delta\mathbf{r}$ на величину выше первого порядка малости относительно Δt .

3. Годограф. Особые точки. Мы назвали годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ ту кривую, которую описывает конец вектора $\mathbf{r}(t)$ при изменении t , если его начало все время находится в некоторой фиксированной точке.

Если $\mathbf{r}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, то вектор $\mathbf{r}'(t)$ там, где он не равен нулю, направлен, как мы видели, по касательной к годографу. Точки, в которых производная $\mathbf{r}'(t)$ не существует или существует и равна 0, называются *особыми*. Эти особые точки могут иметь различный характер. Приведем несколько примеров

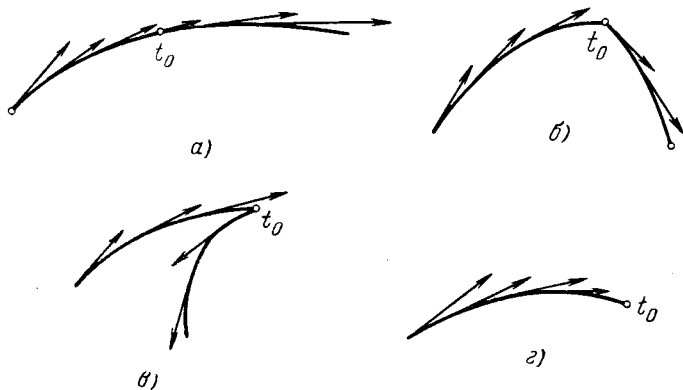


Рис. 3.3.

(рис. 3.3). При движении точки по закону $\mathbf{r}(t)$ путь может представлять собой «гладкую» кривую, однако скорость $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ при $t \rightarrow t_0$ может стремиться к нулю. Материальная точка испытывает остановку в момент $t = t_0$. Это — особенность самого движения, но не той геометрической кривой, по которой движется точка (рис. 3.3, а). В других случаях такая остановка может сопровождаться изменением направления пути (излом; см. рис. 3.3, б). Это — особенность как самого движения, так и соответствующей геометрической кривой. Может оказаться, что на кривой имеется излом, но скорость $\mathbf{r}'(t)$ при приближении к этой точке не стремится к нулю (рис. 3.3, в). Здесь точка испытывает толчок, меняющий ее скорость скачком. Далее, кривая, по которой происходит движение, может иметь точку возврата (рис. 3.3, г), причем скорость материальной точки вблизи этой точки также может либо стремиться к нулю, либо меняться

скачком. Наконец, при $t \rightarrow t_0$ движение $\mathbf{r}(t)$ может просто «замирать» и не возобновляться при $t > t_0$. Это — «покой» в конце пути (рис. 3.3, 2). Эти и различные другие особенности движения представляют интерес при изучении конкретных случаев; вместе с тем они затрудняют применение общих методов. Мы будем в дальнейшем такие особенности исключать и рассматривать движения, для которых $\mathbf{r}'(t)$ всюду существует и не обращается в нуль.

4. Формула Тейлора. Для вектор-функции имеет место формула Тейлора

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t) \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{r}''(t) \Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!} (\mathbf{r}^{(n)}(t) + \boldsymbol{\alpha}) \Delta t^n, \quad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор, стремящийся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Действительно, применив формулу Тейлора к каждой из трех компонент *) $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$, получим

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t) \Delta t + \frac{1}{2} x''(t) \Delta t^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} (x^{(n)}(t) + \alpha_1) \Delta t^n$$

и еще два аналогичных равенства для y и z . Умножив эти равенства соответственно на \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} и сложив, получим формулу (3.3).

Мы видим, таким образом, что основные понятия и правила дифференциального исчисления легко и без существенных изменений переносятся со скалярных функций на векторные. Следует, однако, иметь в виду, что такой перенос все же нельзя делать совершенно автоматически. Например, известная формула конечных приращений (вып. 1, гл. 8, § 9) для вектор-функций несправедлива. (Постройте пример!)

5. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу. Для вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, заданной на отрезке $a \leq t \leq b$, как и для обычных скалярных функций, можно составить интегральные суммы и рассмотреть их предел при стремлении к нулю максимальной длины отрезков, на которые разбит отрезок $[a, b]$. Этот предел называется *интегралом* от $\mathbf{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt.$$

*) Мы, разумеется, предполагаем, что компоненты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяют тем условиям, при которых формула Тейлора для каждой из них имеет место,

Как и для скалярных функций, можно установить, что если $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то этот предел существует.

Легко видеть, что существование предела одной векторной интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

(здесь $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$) равносильно существованию пределов трех скалярных интегральных сумм для трех компонент $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функции $\mathbf{r}(t)$. При этом

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{i} \cdot \int_a^b x(t) dt + \mathbf{j} \cdot \int_a^b y(t) dt + \mathbf{k} \cdot \int_a^b z(t) dt.$$

На интегралы от вектор-функций распространяются обычные свойства интегралов от скалярных функций. Например,

$$\int_a^b u'(t) \mathbf{r}(t) dt = u(b) \mathbf{r}(b) - u(a) \mathbf{r}(a) - \int_a^b u(t) \mathbf{r}'(t) dt$$

— формула интегрирования по частям; $u(t)$ — скалярная функция. Легко выводятся также формулы, связывающие интегрирование с основными операциями векторной алгебры. Например,

$$\int_a^b [\mathbf{c}, \mathbf{r}(t)] dt = \left[\mathbf{c}, \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \right],$$

где \mathbf{c} — постоянный вектор.

6. Векторные функции нескольких скалярных аргументов. Можно рассматривать векторные функции не одного, а нескольких скалярных аргументов (в частности, с вектор-функциями двух скалярных аргументов мы встретимся в этой главе при изучении поверхностей). На такие функции легко переносятся понятие частной производной и другие понятия анализа.