§ 2. Пространственные кривые

1. Векторное уравнение кривой. Вектор-функции скалярного аргумента представляют собой удобный способ задания кривых в пространстве. Действительно, если нам задана некоторая непрерывная вектор-функция $\mathbf{r}(t)\,(a \leqslant t \leqslant b)$, то, построив ее годограф, мы получим некоторую кривую γ в пространстве.

Обратно, если задана тем или иным способом некоторая кривая *) γ, то можно попытаться задать ее с помощью вектор-функции. Для этого поступим следующим образом:

Мы скажем, что кривая γ *параметризована*, если каждой ее точке поставлено в соответствие определенное значение некоторого параметра t, пробегающего какой-то отрезок $[a, b]$, причем это соответствие взаимно однозначно **) и непрерывно в каждой точке отрезка $[a, b]$ (последнее условие означает, что если $t \to t_0$, то и расстояние между точками $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$ кривой тоже стремится к нулю). Если кривая γ параметризована, то радиус-вектор каждой точки этой кривой определяется соответствующим этой точке значением параметра t, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \tag{3.4}$$

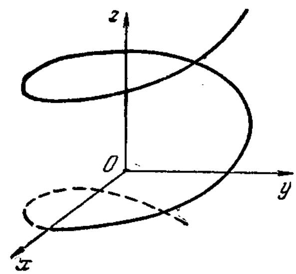

Рис. 3.4.

Это соотношение называют *параметрическим* (*векторным*) *уравнением* кривой γ. Ясно, что векторное уравнение (3.4) можно заменить тремя скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Пользуясь термином, введенным в предыдущем параграфе, можно сказать, что, параметризуя кривую, мы представляем ее как годограф некоторой вектор-функции $\mathbf{r}(t)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие кривые и такие их параметризации, для которых соответствующая вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ трижды непрерывно дифференцируема.

Пример. Положим

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt. \tag{3.5}$$

Это параметрическое уравнение определяет кривую, называемую *винтовой линией* (рис. 3.4).

Рассматривая ту или иную кривую, мы можем выбрать для нее различные параметризации. Например, если кривая γ задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то, положив

$$t = t(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,$$

где $t(\tau)$ — монотонная функция такая, что $t'(\tau) > 0$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, мы можем принять τ за новый параметр и писать уравнение

*) Мы не уточняем здесь самого понятия кривой. Некоторые сведения по этому поводу содержатся в вып. 1, гл. 11, § 1.

**) Это условие означает, что мы рассматриваем кривые, не имеющие точек самопересечения.

кривой γ в виде $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t(\tau))$.

Во многих случаях удобна так называемая *натуральная параметризация* кривой, когда за параметр принимается длина дуги этой кривой, отсчитываемая от фиксированной точки. Переход от какого-либо параметра на кривой к натуральному параметру может быть осуществлен следующим образом: пусть γ — некоторая кривая и t — какой-либо параметр на ней. Выберем на γ некоторую точку M_0, отвечающую значению параметра $t=t_0$, и назовем ее начальной точкой. Возьмем на γ произвольную точку M. Длина l дуги M_0M выражается, как известно, формулой

$$l=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt\ ^{*}),\qquad \text{т. е.}\qquad l=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{r}'(t)|\,dt,$$

где t — значение параметра, отвечающее точке M. Эта формула определяет l как однозначную и непрерывную функцию от t: $l=l(t)$. Если функция $\mathbf{r}(t)$ такова, что $\mathbf{r}'(t)$ нигде не обращается в нуль, то всюду $l'(t)\neq 0$ и, следовательно (см. вып. 1, гл. 11, § 1), t можно представить как однозначную и непрерывную функцию от l: $t=t(l)$. Положив $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t(l))$, мы представим $\mathbf{r}$ как функцию дуги l, т. е. получим натуральную параметризацию кривой.

П р и м е р. Рассмотрим снова винтовую линию (3.5). Для нее

$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt,$$

т. е. $l=\sqrt{a^2+b^2}\,t$. Переходя к параметру l, мы можем переписать уравнение винтовой линии в виде

$$\mathbf{r}(l)=\mathbf{i}\,a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}+\mathbf{j}a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}+\mathbf{k}b\,\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

З а м е ч а н и е. Если в уравнении

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$$

---

*) По существу, эта формула означает следующее: кривая $(x(t), y(t), z(t))$ рассматривается как «ломаная» с бесконечным числом бесконечно малых звеньев (dx, dy, dz). Длина отдельного звена дается теоремой Пифагора и равняется $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$. «Сумма» длин этих «звеньев», т. е. интеграл $\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$, и равна длине кривой.

параметр t представлять себе как время, то кривую, определяемую этим уравнением, можно рассматривать как траекторию точки, движущейся из начального положения со скоростью $\mathbf{r}'(t)$. Но по одной и той же кривой точка может двигаться разными способами: заданием кривой определяется лишь направление скорости в каждый момент, но не ее величина. Можно, в частности, рассмотреть случай, когда скорость движения $\mathbf{r}'$ по модулю тождественно равна единице. Именно это и будет иметь место в случае натуральной параметризации кривой. Действительно, $d\mathbf{r}=\mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy+\mathbf{k}\,dz$, следовательно,

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right|=\frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}}{dl}=\frac{dl}{dl}=1. \tag{3.6}$$

Таким образом, различные параметрические уравнения одной и той же кривой можно кинематически представлять себе как законы движения частиц, описывающих одну и ту же траекторию с разными скоростями. При этом уравнение

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(l),$$

где l — длина дуги описывает движение частицы со скоростью, по модулю равной единице.

2. Основной трехгранник. Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(l). \tag{3.7}$$

В каждой ее точке M (отвечающей значению l) единичный вектор *)

$$\boldsymbol{\tau}=\dot{\mathbf{r}}(l)$$

определяет направление касательной к этой кривой. Вектор

$$\ddot{\mathbf{r}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}$$

ортогонален $\boldsymbol{\tau}$, как производная вектора постоянной длины (см. п. 2 § 1). Разделив его на $|\ddot{\mathbf{r}}|$, мы получим единичный вектор **)

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}, \tag{3.8}$$

ортогональный $\boldsymbol{\tau}$. Присоединим еще к $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ вектор

$$\boldsymbol{\beta}=[\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\nu}]. \tag{3.9}$$

---

*) Здесь и дальше мы будем обозначать производные от $\mathbf{r}$ по натуральному параметру символами $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ и т. д., сохранив обозначения $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ и т. д. для производных по произвольному параметру.

**) В тех точках, где $\ddot{\mathbf{r}}=0$, вектор $\boldsymbol{\nu}$ не определен. Такие точки (они называются точками спрямления) мы в дальнейшем будем исключать из рассмотрения.

Векторы τ, ν и β образуют тройку взаимно ортогональных единичных векторов, которая называется *основным репером* или *основным трехгранником кривой* (3.7) в данной точке (рис. 3.5). Этот трехгранник жестко связан в каждой точке с рассматриваемой кривой, поэтому вид самой кривой можно полностью охарактеризовать, описав движение основного трехгранника при перемещении его вершины по кривой.

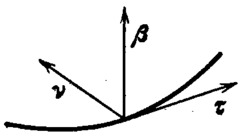

Рис. 3.5.

Отметим, что векторы τ, ν и β удовлетворяют, кроме соотношения (3.9), еще двум аналогичным соотношениям:

$$[\nu, \beta] = \tau, \qquad [\beta, \tau] = \nu.$$

Векторы τ, ν, β называются соответственно единичными векторами *касательной, нормали* и *бинормали*.

3. Формулы Френе. Движение основного трехгранника задается скоростями изменения векторов τ, ν и β, т. е. их производными по l. Вычислим эти производные.

Производную вектора τ, т. е. вектор $\ddot{\mathbf{r}}$, мы уже рассматривали. Введя обозначение

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|,$$

мы запишем эту производную в виде

$$\dot{\tau} = k\nu,$$

где k — неотрицательное число.

Рассмотрим теперь вектор β. Его производная $\dot{\beta}$, как и производная всякого единичного вектора, перпендикулярна ему. Кроме того, она перпендикулярна τ. В самом деле, $\beta = [\tau, \nu]$ и, значит, $\dot{\beta} = [\dot{\tau}, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [k\nu, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [\tau, \dot{\nu}]$, а этот вектор перпендикулярен τ. Вектор $\dot{\beta}$ перпендикулярен β и τ, следовательно, он коллинеарен ν. Поэтому можно положить

$$\dot{\beta} = -\varkappa\nu,$$

где $\varkappa$ — числовой коэффициент *).

Наконец, вычислим $\dot{\nu}$. Имеем

$$\dot{\nu} = [\beta, \tau]^{\boldsymbol\cdot} = [\dot{\beta}, \tau] + [\beta, \dot{\tau}] = [-\varkappa\nu, \tau] + [\beta, k\nu] = -k\tau + \varkappa\beta.$$

---

*) Этот коэффициент может быть как положительным, так и отрицательным. Обозначение $-\varkappa$ (а не $\varkappa$) удобно для дальнейшего.

Итак, мы получили для производных $\dot{\boldsymbol{\tau}}$, $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ следующие формулы:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = k\boldsymbol{\nu}, \tag{3.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \tag{3.11}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\varkappa\boldsymbol{\nu}. \tag{3.12}$$

Они называются *формулами Френе* *). Эти формулы содержат две скалярные величины: k и $\varkappa$. Величина k называется *кривизной* кривой, а $\varkappa$ — *кручением*. Геометрический смысл кривизны и кручения мы рассмотрим несколько позже.

4. Вычисление кривизны и кручения. По определению

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|. \tag{3.13}$$

Таким образом, для вычисления кривизны кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ достаточно найти вектор $\ddot{\mathbf{r}}(l)$ и вычислить его длину.

Для вычисления кручения $\varkappa$ возьмем равенства

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\tau}, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = k\boldsymbol{\nu}$$

и продифференцируем последнее из них еще раз по l. Воспользовавшись формулой (3.11) для $\dot{\boldsymbol{\nu}}$, получим

$$\dddot{\mathbf{r}} = \dot{k}\boldsymbol{\nu} - k^2\boldsymbol{\tau} + k\varkappa\boldsymbol{\beta}.$$

Из трех последних равенств следует, что

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = k^2\varkappa, \tag{3.14}$$

откуда $\varkappa = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{k^2}$, т. е.

$$\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2}. \tag{3.15}$$

Формулы (3.13) и (3.15) позволяют вычислить кривизну k и кручение $\varkappa$ при натуральной параметризации кривой. Если же кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

где $\mathbf{r}(t)$ — трижды дифференцируемая функция какого-то произвольного параметра t, то, рассматривая t как функцию длины дуги l, получим

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{dl}, \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2t}{dl^2}, \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dl^3} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\left(\frac{dt}{dl}\right)^3 + 3\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{dt}{dl}\frac{d^2t}{dl^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^3t}{dl^3}. \end{gathered} \tag{3.16}$$

*) Жан Френе — французский математик (1801—1880).

Первое из этих равенств можно переписать так:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}' \frac{dt}{dl},$$

откуда (поскольку $|\boldsymbol{\tau}| = 1$)

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \tag{3.17}$$

$\left(\text{мы считаем, что } t \text{ и } l \text{ возрастают в одном и том же направлении, т. е. что } \frac{dt}{dl} > 0\right)$. Далее, взяв векторное произведение первых двух равенств (3.16), будем иметь

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\left(\frac{dt}{dl}\right)^3,$$

или, поскольку $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right] = k\boldsymbol{\beta}$,

$$k\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]\left(\frac{dt}{dl}\right)^3. \tag{3.18}$$

Так как $|\boldsymbol{\beta}| = 1$, то из (3.17) и (3.18) получаем

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \tag{3.19}$$

Наконец, подставляя выражения (3.16) в равенство (3.14), получим

$$(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))\left(\frac{dt}{dl}\right)^6 = k^2\varkappa. \tag{3.20}$$

Из двух последних равенств получаем окончательную формулу для кручения:

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]|^2}. \tag{3.21}$$

Упражнение. Вычислить кривизну и кручение винтовой линии

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\, a \cos t + \mathbf{j}\, a \sin t + \mathbf{k}\, bt.$$

Замечание. Вернемся еще раз к формулам (3.16). Они показывают, что векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ выражаются линейно через векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$. Иначе говоря, векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ определяют ту же самую плоскость, что и векторы $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, а именно, *соприкасающуюся* плоскость. Таким образом, соприкасающаяся плоскость кривой (в данной точке) может быть определена как плоскость, в которой лежат векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ (какой бы ни была параметризация кривой). Если представлять себе t как время, а уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

как закон движения точки, то можно сказать, что *соприкасающаяся плоскость — это та плоскость, в которой лежат векторы скорости и ускорения движущейся точки.*

5. Система координат, связанная с основным трехгранником. Три вектора $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ определяют в каждой точке кривой $\mathbf{r}(l)$ свою систему координат, в которой координатными осями служат:

1) *касательная* (ее направление определяется вектором $\boldsymbol{\tau}$),

2) *главная нормаль*; ее направление определяется вектором $\boldsymbol{\nu}$) и

3) *бинормаль* (ее направление определяется вектором $\boldsymbol{\beta}$).

Координатными плоскостями в этой системе служат:

1) плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная $\boldsymbol{\tau}$ (т. е. плоскость, в которой лежат главная нормаль и бинормаль); она называется *нормальной плоскостью* кривой $\mathbf{r}=\mathbf{r}(l)$ в точке M;

2) плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная $\boldsymbol{\nu}$; она называется *спрямляющей плоскостью*;

3) плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная $\boldsymbol{\beta}$ (т. е. плоскость, в которой лежат $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$); она называется *соприкасающейся плоскостью*.

Эта система координат называется *сопровождающей системой координат*.

Расположение этих прямых и плоскостей показано на рис. 3.6.

Задача. Для кривой $\mathbf{r}=\mathbf{r}(l)$ написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали, а также нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей в точке $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(l_0)$.

Решение. Векторное уравнение прямой, проходящей через точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ в направлении вектора $\mathbf{a}$, имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{a}, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

а уравнение плоскости, проходящей через точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ и ортогональной вектору $\mathbf{n}$, пишется так:

$$(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})=0.$$

Отсюда сразу получаем следующие уравнения:

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_0+\lambda\dot{\mathbf{r}}_0 \qquad \text{(касательная)},$$
$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_0+\lambda\ddot{\mathbf{r}}_0 \qquad \text{(главная нормаль)},$$
$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_0+\lambda[\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0] \qquad \text{(бинормаль)},$$
$$(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)=0 \qquad \text{(нормальная плоскость)},$$
$$(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0)=0 \qquad \text{(спрямляющая плоскость)},$$
$$(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_0, [\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0])=0 \qquad \text{(соприкасающаяся плоскость)}$$

(здесь $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(l_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0=\dot{\mathbf{r}}(l_0)$, $\ddot{\mathbf{r}}_0=\ddot{\mathbf{r}}(l_0)$).

Упражнения. 1. Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали для кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Указание. Заметим, что вектор $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ направлен по бинормали, а вектор $[\mathbf{r}', [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']]$ — по главной нормали.

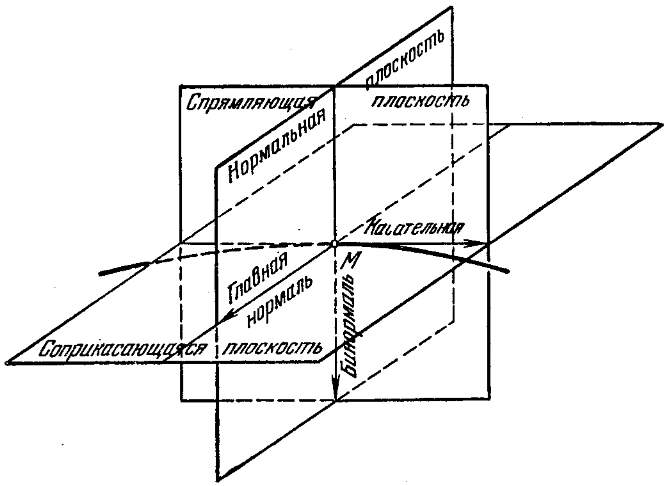

Рис. 3.6.

2. Написать уравнения нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей для кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

3. Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей для винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

в точке $t = 0$.

6. Вид кривой вблизи произвольной ее точки. Воспользуемся сопровождающей системой координат для выяснения вида кривой в окрестности какой-либо ее точки.

Предположим, что в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(l_0)$ производные

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(l_0), \quad \ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(l_0), \quad \dddot{\mathbf{r}}_0 = \dddot{\mathbf{r}}(l_0)$$

отличны от нуля, и разложим функцию $\mathbf{r}(l)$ в окрестности точки l_0

по формуле Тейлора *):

$$\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta l + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta l^2 + \frac{1}{6}\dddot{\mathbf{r}}_0 \Delta l^3 + O(\Delta l^4); \qquad (3.22)$$

$$\Delta l = l - l_0.$$

Воспользуемся теперь сопровождающей системой координат, т. е. примем точку $\mathbf{r}_0$ за начало координат, касательную за ось x, главную нормаль за ось y и бинормаль за ось z. Применив для вычисления производных $\ddot{\mathbf{r}}$ и $\dddot{\mathbf{r}}$ формулы Френе, заменим равенство (3.22) следующими тремя скалярными равенствами:

$$x = \Delta l - \frac{k^2}{6}\Delta l^3 + O(\Delta l^4), \qquad (3.23\text{а})$$

$$y = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + \frac{\dot{k}}{6}\Delta l^3 + O(\Delta l^4), \qquad (3.23\text{б})$$

$$z = \frac{1}{6} k\varkappa \Delta l^3 + O(\Delta l^4). \qquad (3.23\text{в})$$

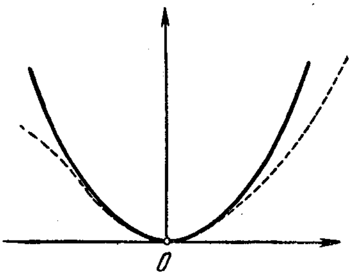

Рис. 3.7.

Найдем проекции этой кривой на соприкасающуюся и спрямляющую плоскости.

Возьмем равенства (3.23а) и (3.23б) и ограничимся в них главными членами; эти равенства примут вид

$$x = \Delta l, \quad y = \frac{1}{2} k \Delta l^2.$$

Исключив отсюда Δl, получим уравнение параболы (рис. 3.7)

$$y = \frac{1}{2} k x^2,$$

которая представляет собой, с точностью до величин порядка Δl^3, проекцию кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ на соприкасающуюся плоскость. Так как по определению $k > 0$, то ветви этой параболы отходят от касательной в ту же сторону, куда направлен и единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$, причем тем быстрее, чем больше k.

Рассмотрим теперь проекцию кривой на спрямляющую плоскость. Из формул (3.23а) и (3.23в), ограничиваясь в них главными членами, получаем

$$x = \Delta l, \quad z = \frac{1}{6} k\varkappa \Delta l^3.$$

Исключив отсюда Δl, получим уравнение кубической параболы

$$z = \frac{1}{6} k\varkappa x^3. \qquad (3.24)$$

*) $O(\Delta t^4)$ означает в соответствии с общепринятой символикой величину порядка Δt^4.

Здесь знак коэффициента при x^3 совпадает со знаком кручения (так как кривизна всегда положительна). Соответствующие параболы изображены на рис. 3.8, *а* и *б*. Так как при малых Δl знаки координат x и y определяются знаками их главных членов, то из формулы 3.24 вытекает:

1. Вблизи точки, в которой кручение отлично от нуля, кривая расположена по обе стороны от соприкасающейся плоскости.

2. Кривая отходит от соприкасающейся плоскости тем быстрее, чем больше абсолютная величина кручения. При этом, если $\varkappa > 0$,

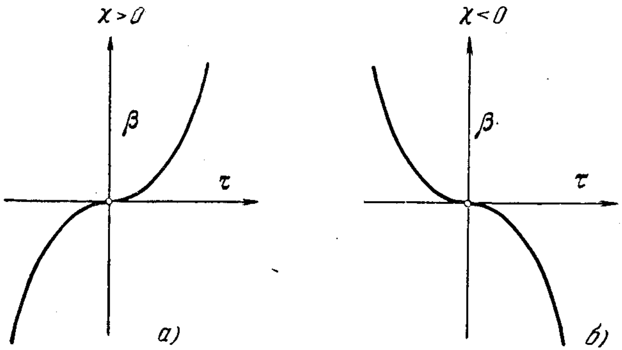

Рис. 3.8.

то при возрастании l кривая отходит от соприкасающейся плоскости в ту сторону, куда указывает вектор $\boldsymbol{\beta}$, а при $\varkappa < 0$ — в противоположную.

Задачи. 1. Показать, что кривая, кривизна которой тождественно равна нулю, есть прямая линия.

2. Показать, что кривая, кручение которой тождественно равно нулю, — плоская (т. е. она целиком лежит в некоторой фиксированной плоскости).

Решение. 1. Если $k \equiv 0$, то $\ddot{\mathbf{r}} \equiv 0$, т. е. $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e} = \text{const}$, откуда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + l\mathbf{e}_0$, а это — уравнение прямой.

2. Если $\varkappa \equiv 0$, то, в силу третьей формулы Френе, $\dot{\boldsymbol{\beta}} \equiv 0$, т. е. $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 = \text{const}$. Так как векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\boldsymbol{\beta}_0$ ортогональны, то

$$(\boldsymbol{\beta}, \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

т. е., в силу постоянства $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$,

$$\frac{d}{dl}(\boldsymbol{\beta}_0, \mathbf{r}) = 0.$$

Отсюда $(\boldsymbol{\beta}_0, \mathbf{r}) = \text{const}$, а это есть уравнение плоскости.

7. Ориентированная кривизна плоской кривой. Рассмотрим кривую, лежащую в некоторой фиксированной плоскости. Приняв эту плоскость за плоскость xy, напишем уравнения нашей кривой в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z \equiv 0. \tag{3.25}$$

Вычислив кривизну этой кривой по формуле (3.19), получим

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{3.26}$$

Однако обычно (см., например, вып. 1, гл. 16, § 3) кривизной плоской кривой называют само выражение

$$\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \tag{3.27}$$

а не его модуль. Дело в том, что на плоскости (в отличие от трехмерного пространства) можно определить не только абсолютную величину скорости вращения касательной, но и направление этого вращения (против или по часовой стрелке). Именно это направление вращения и указывается знаком величины (3.27). Если это выражение положительно, то кривая называется выпуклой (рис. 3.9, *а*), а если оно отрицательно, то кривая называется вогнутой (рис. 3.9, *б*). Величину (3.27) называют иногда ориентированной кривизной кривой (3.25).

8. Понятие о натуральных уравнениях кривой. Формулы (3.13) и (3.15) позволяют найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$, в виде функций от l:

$$k = k(l), \quad \varkappa = \varkappa(l). \tag{3.28}$$

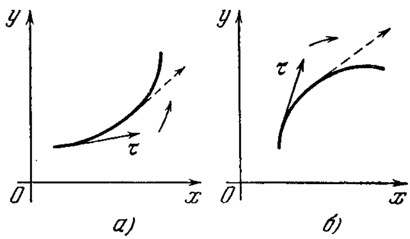

Рис. 3.9.

Эти соотношения, связывающие кривизну и кручение кривой с длиной дуги, называются *натуральными уравнениями* данной кривой. Естественно поставить вопрос: в какой мере натуральные уравнения (3.28) определяют саму кривую. Нетрудно показать, что каждая кривая определяется своими натуральными уравнениями однозначно с точностью до ее положения в пространстве.

Действительно, пусть даны две кривые γ и γ_1. Если на этих кривых можно ввести натуральные параметры l и l_1 так, чтобы в точках, отвечающих одинаковым значениям этих параметров, совпадали их кривизны k и k_1 и их кручения $\varkappa$ и $\varkappa_1$, т. е. чтобы при $l = l_1$ выполнялись равенства

$$k(l) = k_1(l_1), \quad \varkappa(l) = \varkappa_1(l_1),$$

то мы скажем, что кривые γ и γ_1 имеют совпадающие натуральные уравнения. Покажем, что в этом случае можно, передвигая одну из кривых как твердое тело, полностью эти кривые совместить. Действительно, совместим некоторую точку A кривой γ, отвечающую фиксированному значению l^0 параметра l, с точкой кривой γ_1, отвечающей тому же значению параметра l_1. Далее, повернем кривую γ так, чтобы единичные векторы τ, ν, β основного трехгранника, отвечающего этой кривой в точке A, совпали бы соответственно с единичными векторами τ_1, ν_1, β_1 основного трехгранника, отвечающего точке A_1 кривой γ_1. Этого, очевидно, всегда можно добиться. Мы имеем, таким образом,

$$\tau^0=\tau_1^0, \quad \nu^0=\nu_1^0, \quad \beta^0=\beta_1^0, \tag{3.29}$$

где индекс «нуль» означает, что векторы берутся в точке, отвечающей значению параметра $l^0=l_1^0$. Ставя в соответствие друг другу те точки M и M_1 кривых γ и γ_1, в которых $l=l_1$, мы можем считать, что на γ и γ_1 введен один и тот же параметр, и рассматривать τ_1, ν_1 и β_1 как функции от l. Рассмотрим, далее, скалярную функцию

$$\sigma(l)=(\tau, \tau_1)+(\nu, \nu_1)+(\beta, \beta_1)$$

и вычислим ее производную по l. Пользуясь при этом формулами Френе, получаем

$$\frac{d\sigma}{dl}=k(\nu, \tau_1)+k(\nu_1, \tau)+(-k\tau+\varkappa\beta, \nu_1)+ \\ +(\nu, -k\tau_1+\varkappa\beta_1)-\varkappa(\nu, \beta_1)-\varkappa(\nu_1, \beta)=0,$$

т. е. на самом деле σ от l не зависит. Из равенств (3.29) вытекает, что при $l=l_0$ значение σ равняется трем; таким образом,

$$\sigma(l)\equiv 3.$$

Каждое из трех входящих в $\sigma(l)$ слагаемых представляет собой скалярное произведение двух единичных векторов и, следовательно, не может быть больше единицы. А так как вся сумма равна трем, то каждое из этих слагаемых должно быть в точности равно единице. Но скалярное произведение двух единичных векторов равно единице только тогда, когда эти векторы совпадают. Таким образом,

$$\tau\equiv\tau_1, \quad \nu\equiv\nu_1, \quad \beta\equiv\beta_1$$

при всех l, т. е. основные трехгранники кривых γ и γ_1 совпадают не только в начальной точке l_0, но и при всех значениях параметра. Отсюда вытекает, что совпадают и сами кривые, потому что кривую всегда можно восстановить по вектору $\tau=\dot{\mathbf{r}}(l)$, именно

$$\mathbf{r}(l)=\mathbf{r}(l_0)+\int_{l_0}^{l}\tau(\lambda)\,d\lambda.$$

Очевидно, верно и обратное: если две кривые отличаются друг от друга только положением в пространстве, то они имеют одинаковые натуральные уравнения.

Естественно поставить следующий вопрос: возьмем произвольно две непрерывные функции

$$k(l) \text{ и } \varkappa(l), \quad l_1\leqslant l\leqslant l_2,$$

причем $k(l) > 0$. Существует ли кривая, для которой эти функции представляют собой соответственно кривизну и кручение? Ответ на этот вопрос положительный. Однако приводить здесь соответствующее доказательство мы не будем, так как оно потребовало бы ряда сведений из теории дифференциальных уравнений, которых мы здесь не приводим.

9. Некоторые приложения к механике. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по некоторой траектории. Если $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор точки в момент времени t, то уравнение ее траектории запишется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

представляет собой скорость движения точки по траектории. Вводя натуральный параметр l, мы можем написать

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{dl}{dt} = \boldsymbol{\tau}\frac{dl}{dt}.$$

Так как $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, то

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt},$$

т. е. производная $\frac{dl}{dt}$ представляет собой абсолютную величину скорости.

Вторая производная

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

радиус-вектора по t — ускорение. Его можно записать в виде

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \boldsymbol{\tau}\frac{d^2l}{dt^2}.$$

С помощью формул Френе получаем

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\tau}\frac{d^2l}{dt^2} + \boldsymbol{\nu}k\left(\frac{dl}{dt}\right)^2.$$

Таким образом, ускорение раскладывается в сумму двух составляющих, одна из которых $\boldsymbol{\tau}\frac{d^2l}{dt^2}$ направлена по касательной и называется *тангенциальным ускорением*, а другая $\boldsymbol{\nu}k\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ — по главной нормали и называется *нормальным ускорением*. Тангенциальное ускорение $\mathbf{w}_\tau = \boldsymbol{\tau}\frac{d^2l}{dt^2}$ можно записать в виде $\mathbf{w}_\tau = \boldsymbol{\tau}\frac{dv}{dt}$, где $v = \frac{dl}{dt}$ — абсолютная величина скорости, т. е. *тангенциальное ускорение* —

это скорость изменения абсолютной величины скорости v. С формулой для нормального ускорения $\mathbf{w}_\nu = \nu k \left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ читатель знаком из элементарного курса физики. Именно, известно, что при движении точки по окружности радиуса R с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ ускорение направлено к центру окружности и равно $\frac{1}{R}v^2$, но $\frac{1}{R}$ — это как раз кривизна k окружности. Таким образом, разложение $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_\nu = \tau\frac{d^2l}{dt^2} + \nu k\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ можно наглядно представить себе так: движение в данный момент времени как бы разлагается на ускоренное движение по касательной (что дает в ускорении член $\mathbf{w}_\tau$) и на движение по окружности радиуса $R = 1/k$ с постоянной скоростью (что дает в ускорении член $\mathbf{w}_\nu$). Точка участвует одновременно в двух этих движениях (рис. 3.10).

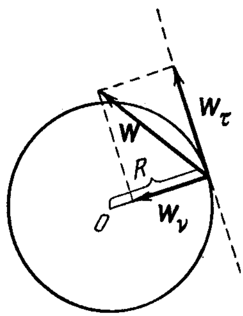

Рис. 3.10.

Задача. Материальная точка движется под действием некоторой центральной силы, т. е. силы, которая в каждый момент времени направлена по прямой, соединяющей эту материальную точку с некоторым неподвижным центром. Доказать, что траектория плоская.

Решение. Примем притягивающий центр за начало координат. Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

— уравнение траектории движения. Сила, действующая на движущуюся точку, направлена к притягивающему центру. Следовательно, согласно второму закону Ньютона, такое же направление имеет и ускорение, т. е. вектор $\mathbf{r}''(t)$; таким образом, векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}''$ коллинеарны. Но тогда в каждой точке траектории выполнено соотношение

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''') = 0.$$

Дифференцируя это смешанное произведение по t, получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = (\mathbf{r}', \mathbf{r}', \mathbf{r}'') + (\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \mathbf{r}'') + (\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''') = 0.$$

Первые два слагаемых в средней части равенства равны нулю, следовательно, равно нулю и третье. Но если

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''') = 0$$

и векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}''$ коллинеарны, то

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = 0$$

при всех t, но тогда $\varkappa = 0$, а это и есть условие того, что наша кривая плоская (п. 6 § 2).