§ 3. Параметрическое уравнение поверхности

1. Понятие поверхности. В этом и следующих параграфах мы применим аппарат анализа к изучению поверхностей.

Понятие поверхности, интуитивно достаточно ясное, можно определять с различной степенью общности. В анализе чаще всего приходится рассматривать поверхности, задаваемые уравнениями вида

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в некоторой области G. Несколько более широкий класс поверхностей мы получим, рассматривая уравнения вида

$$F(x, y, z) = 0.$$

Чтобы такое уравнение действительно определяло поверхность (в смысле, соответствующем нашим наглядным представлениям), необходимо на функцию $F(x, y, z)$ наложить некоторые дополнительные условия.

Определение поверхности как совокупности точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям вида $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$, не очень удобно, так как оно привязывает понятие поверхности к выбору той или иной системы координат. Сформулируем понятие поверхности, не прибегая к координатной системе. Введем прежде всего важное понятие односвязной области.

Пусть G — некоторая область на плоскости. Назовем область G *односвязной*, если она удовлетворяет следующему условию: каков бы ни был замкнутый контур L, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком лежит в G.

Иными словами, односвязность области означает отсутствие в ней «дырок». Любой замкнутый контур, лежащий внутри такой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Если область не односвязна, то она называется *многосвязной*.

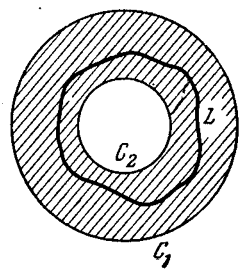

Рис. 3.11.

Примерами односвязных областей служат круг, треугольник, квадрат и т. д. Кольцо, т. е. часть плоскости, ограниченная двумя концентрическими окружностями, представляет собой простейший пример многосвязной области: действительно, область, ограниченная контуром L (рис. 3.11), вовсе не составляет части кольца, заключенного между окружностями C_1 и C_2.

Назовем теперь простой поверхностью множество точек в трехмерном пространстве, представляющее собой взаимно однозначный и в обе стороны непрерывный образ какой-либо замкнутой ограниченной односвязной области. Далее, просто *поверхностью* мы будем называть соединение любого конечного числа простых поверхностей. При этом мы, вообще говоря, допускаем и наличие у поверхности самопересечений, т. е. рассматриваем и такие геометрические образы, как, скажем, изображенный на рис. 3.12.

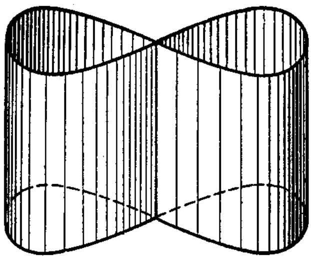

Рис. 3.12.

Если $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в замкнутой односвязной ограниченной области G, то уравнение

$$z = f(x, y)$$

определяет простую поверхность. Действительно, отображение

$$(x, y) \leftrightarrow (x, y, f(x, y))$$

устанавливает взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие (проверьте это!) между точками области G и точками, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

Практически наши дальнейшие рассмотрения будут ограничиваться поверхностями, представленными как соединение конечного числа простых поверхностей, определяемых уравнениями вида $z = f(x, y)$. При этом от соответствующих функций f нам придется обычно, кроме непрерывности, требовать еще и некоторой гладкости (существования и непрерывности первых или вторых производных). Эти условия будут оговорены там, где они нам понадобятся.

2. Параметризация поверхности. Хотя задание поверхности с помощью уравнения вида $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$ в анализе встречается очень часто, во многих случаях удобнее задавать поверхность с помощью параметрических уравнений. Для того чтобы написать уравнение поверхности в параметрической форме, введем прежде всего понятие *координат на поверхности*.

Пусть на некоторой поверхности Σ задано однопараметрическое семейство линий *). Назовем это семейство *правильным*, если через каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия из данного семейства. Если на поверхности даны два правильных семейства, такие, что каждая из линий первого семейства пересекается (без касания!) с каждой линией второго семейства не более чем в одной точке, то говорят, что на поверхности задана *координатная сеть*. Пусть линии первого из семейств, образующих координатную сеть, определяются значениями некоторого параметра u,

*) Таким образом, каждая линия этого семейства характеризуется определенным значением некоторого параметра.

а линии второго семейства — значениями некоторого параметра v. Так как по условию через каждую точку поверхности проходит единственная кривая из первого семейства и единственная кривая второго семейства, то положение точки на поверхности однозначно определяется соответствующими этим линиям значениями u_0 и v_0 параметров u и v. Параметры u и v, значениями которых определяются линии, составляющие координатную сеть, называются *координатами на данной поверхности.*

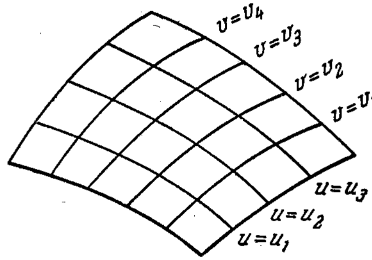

Рис. 3.13.

Замечание. В § 6 гл. 1 мы вводили криволинейные координаты в плоской области. Здесь мы, собственно говоря, повторили то же самое построение, но только применительно к кривой поверхности. Введение координат на поверхности можно, очевидно, рассматривать как задание взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения поверхности на некоторую часть плоскости, в которой введены декартовы координаты u и v. При этом линии, образующие координатную сеть, — это образы лежащих в плоскости uv прямых, параллельных координатным осям.

Примеры. 1. *Тором* называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг не пересекающей ее прямой, лежащей в плоскости этой окружности. Положение точки на окружности можно задавать углом $\varphi\,(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, отсчитываемым от некоторой начальной точки. Положение самой окружности можно задавать углом поворота ψ, который отсчитывается от начального положения. Таким образом, положение точки на торе определяется двумя углами φ и ψ, каждый из которых меняется от 0 до 2π. Линии $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ соответствующей координатной сети изображены на рис. 3.14.

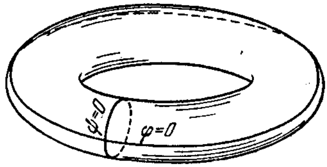

Рис. 3.14.

2. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$; иначе говоря, она проектируется взаимно однозначно на некоторую часть плоскости xy. Линии, которые при этом проектируются в прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, образуют на поверхности $z = f(x, y)$ координатную сеть (рис. 3.15).

Ясно, конечно, что на одной и той же поверхности можно задавать различные координатные сети.

3. Параметрическое уравнение поверхности. Если на поверхности Σ введены каким-либо образом координаты u, v, то говорят, что эта поверхность *параметризована* параметрами u и v. Каждая точка такой поверхности может быть задана значениями параметров u и v. Но эта же точка может быть задана и своими декартовыми координатами. Следовательно, декартовы координаты точек параметризованной поверхности представляют собой функции координат на поверхности:

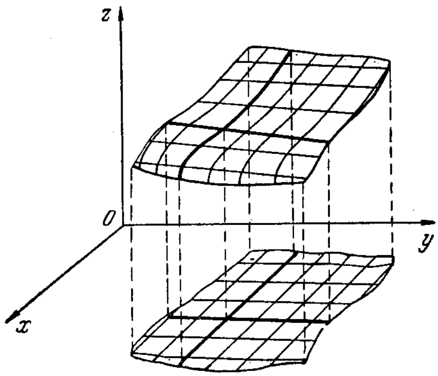

Рис. 3.15.

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{3.30}$$

Эти три скалярных уравнения можно заменить одним векторным:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \tag{3.30'}$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Уравнения вида (3.30) или (3.30′) мы будем называть параметрическими уравнениями поверхности.

Замечание 1. В параметрическом уравнении кривой координаты x, y, z являются функциями одного параметра. В уравнении поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, представляющей собой геометрический образ двух измерений, естественно должны участвовать два независимых параметра.

Замечание 2. Уравнение $z = f(x, y)$ можно рассматривать как частный случай параметрического уравнения, если принять x и y за параметры и положить

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

Упражнение. Написать параметрическое уравнение тора в координатах φ и ψ (см. пример 1 п. 2).

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности, заданные именно параметрическими уравнениями, причем функцию $\mathbf{r}(u, v)$ будем предполагать непрерывной и имеющей непрерывные частные производные по u и v. Начиная с § 8, нам придется потребовать также существования и непрерывности ее частных производных второго порядка.

4. Кривые на поверхности. Рассмотрим на поверхности, заданной уравнением (3.30′), какую-нибудь кривую. Если на этой кривой введен некоторый параметр t, то каждому значению t будет отвечать некоторая точка поверхности, т. е. некоторые значения u и v. Таким образом, вдоль кривой координаты u и v являются функциями параметра t:

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями кривой на поверхности. Подставив их в уравнение поверхности, получаем параметрическое уравнение кривой на поверхности:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t),\ v(t)). \tag{3.31}$$

И обратно, подставив в уравнение поверхности (3.30′) вместо независимых переменных u и v какие-либо функции одного переменного t, мы получим уравнение некоторой кривой, лежащей на этой поверхности.

Рассмотрим касательную к кривой (3.31). Ее направление определяется вектором

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

который представляет собой линейную комбинацию векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$,

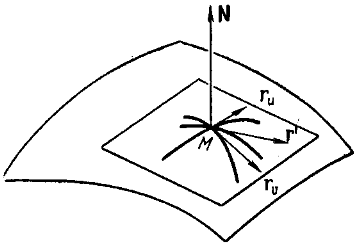

Рис. 3.16.

называемых *координатными векторами* и представляющих собой векторы, касательные к координатным линиям, проходящим через рассматриваемую точку. Для краткости обозначим их $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

5. Касательная плоскость. Рассмотрим всевозможные кривые на поверхности, проходящие через данную точку M, и касательные векторы к ним в этой точке (рис. 3.16). Каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, т. е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M. Напишем уравнение касательной плоскости. Поскольку векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ лежат в касательной плоскости, вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v]$ нормален к ней и уравнение этой плоскости имеет вид *)

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r},\ \mathbf{N}) = 0 \tag{3.32}$$

(здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки касания, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор текущей точки касательной плоскости).

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,\ y)$, т. е. в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}f(x,\ y).$$

Напишем уравнение касательной плоскости для такой поверхности.

*) Точки, в которых $[\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v] = 0$, мы исключаем из рассмотрения.

Имеем

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \mathbf{k} f'_x, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \mathbf{k} f'_y$$

и, следовательно,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y] = -\mathbf{i} f'_x - \mathbf{j} f'_y + \mathbf{k}. \tag{3.33}$$

Подставив в уравнение касательной плоскости (3.32) вместо $\rho - \mathbf{r}$ вектор $\mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0) + \mathbf{k}(z - z_0)$, а вместо нормального вектора $\mathbf{N}$ его выражение (3.33), получим уравнение плоскости, касающейся поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0):

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0), \tag{3.34}$$

где значения четных производных f'_x и f'_y берутся в точке касания (x_0, y_0).

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет z как дифференцируемую функцию от x и y, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставив эти выражения вместо f'_x и f'_y в уравнение (3.33), получаем уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x, y, z) = 0$,

$$(x - x_0) F'_x + (y - y_0) F'_y + (z - z_0) F'_z = 0.$$

Здесь значения F'_x, F'_y и F'_z также берутся в точке касания (x_0, y_0, z_0).

6. Нормаль к поверхности. Вычислим направляющие косинусы вектора

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v],$$

нормального к поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Так как

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

то вектор $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ имеет компоненты

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{3,35}$$

а его направляющие косинусы соответственно равны

$$\cos(\mathbf{N}, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(\mathbf{N}, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos(\mathbf{N}, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

или в векторной форме уравнением

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},$$

то

$$A = \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & 1 \\ f'_y & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

т. е. в этом случае

$$\cos(\mathbf{N}, x) = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}, \quad \cos(\mathbf{N}, y) = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$
$$\cos(\mathbf{N}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}. \tag{3.36}$$

7. Системы координат в касательных плоскостях. Рассмотрим поверхность Σ, в каждой точке M которой можно построить касательную плоскость. Полезно представлять себе поверхность, покрытую «чешуей» касательных плоскостей. Поверхность — это *кривое многообразие-носитель*, ее касательные плоскости — это *плоские несомые многообразия*. Этот наглядный образ будет полезен при изучении дальнейшего материала этой главы.

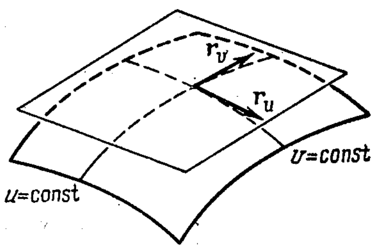

Рис. 3.17.

Выберем в каждой касательной плоскости пару неколлинеарных векторов (репер) $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, которые определят в ней систему координат. Этот репер, разумеется, можно выбирать в каждой точке произвольным образом. Однако задание параметризации u, v, естественно, порождает в каждой из касательных плоскостей некоторый специальный репер, именно репер $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Действительно, фиксируем значение параметра $v = v_0$ и будем менять параметр u; тогда радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v_0)$ опишет на поверхности координатную кривую $v = v_0 = \text{const}$ (рис. 3.17). Касательный вектор к этой кривой, т. е. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$, будет лежать в касательной плоскости к поверхности (см. п. 4). Аналогично вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ также лежит в касательной плоскости к поверхности. Мы предполагаем, что через каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия каждого из семейств $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Поэтому в каждой касательной плоскости возникает один и только один репер $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$; если эти векторы отличны от нуля, то они не коллинеарны, поскольку по условию кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ ни в одной точке не касаются друг друга. Опасно лишь обращение какого-либо из этих векторов в нуль. Мы будем в дальнейшем считать, что параметризация на рассматриваемом куске поверхности такова, что $\mathbf{r}_u \neq 0$ и $\mathbf{r}_v \neq 0$.

Итак, *задание параметризации u, v на поверхности порождает в каждой касательной плоскости невырожденный репер $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_u$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_v$, т. е. некоторую аффинную систему координат.*

Выбор другой параметризации $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ порождает в несомых касательных плоскостях другой набор систем координат $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{r}_{\tilde{u}}$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{r}_{\tilde{v}}$, а в каждой из касательных плоскостей переход от одной параметризации к другой порождает *аффинное преобразование системы координат.*

Действительно, пусть

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

— выражение старых параметров u, v через новые $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. По правилу дифференцирования сложной вектор-функции имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Таким образом, новый репер $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$ выражается через старый $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_2, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.37$'$}$$

Аналогично выражается старый репер $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ через новый $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$.