§ 5. Кривизна линий на поверхности. Вторая квадратичная форма

В предыдущих параграфах мы получили формулы для вычисления длин кривых на поверхности, углов между кривыми и площади поверхности. Однако эти величины еще не определяют форму поверхности. Например, цилиндр и плоскость — это разные поверхности, хотя цилиндр можно развернуть на плоскость так, что при этом все углы, длины и площади сохраняются. Для изучения формы поверхности мы примем следующий метод: взяв в рассматриваемой точке нормаль к поверхности, будем проводить через эту нормаль всевозможные плоскости (нормальные плоскости) и изучать форму получаемых при этом сечений поверхности (*нормальных сечений*).

1. Нормальные сечения поверхности и их кривизна. Рассмотрим поверхность Σ, заданную уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Вектор-функцию $\mathbf{r}(u, v)$ мы будем считать здесь и далее дважды непрерывно дифференцируемой. Возьмем на поверхности Σ некоторую точку M_0 и выберем на нормали к Σ, проведенной в этой точке, определенное направление, т. е. определенный единичный вектор $\mathbf{n}$. Пусть γ — одно из проходящих через M_0 нормальных сечений. Таким образом, кривая γ лежит в плоскости, проходящей через единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к Σ в точке M_0 (рис. 3.23). γ представляет собой плоскую кривую, и форма этой кривой в окрестности точки M_0 вполне определяется ее кривизной k в этой точке и направлением вогнутости (по отношению к выбранному направлению нормали в точке M_0). Для вычисления кривизны кривой γ запишем уравнение этой кривой в виде

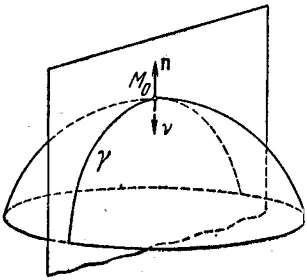


Рис. 3.23.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(l), v(l)) \tag{3.46}$$

(l — натуральный параметр) и воспользуемся 1-й формулой Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = k\boldsymbol{\nu},$$

откуда

$$k = \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial l^2}, \boldsymbol{\nu}\right). \tag{3.47}$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен, очевидно, по нормали к поверхности Σ в точке M_0, и следовательно, он или совпадает с $\mathbf{n}$ (если направление вогнутости сечения γ совпадает с выбранным направлением нормали к Σ), или отличается от $\mathbf{n}$ знаком (если эти направления противоположны). Для того чтобы учесть одновременно и величину кривизны и направление вогнутости сечения, введем величину

$$\tilde{k} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}, \mathbf{n}\right), \tag{3.48}$$

которую мы назовем *нормальной кривизной* поверхности Σ в точке M_0 в направлении сечения γ. Из сказанного ясно, что $k=|\tilde{k}|$. При вращении вокруг $\mathbf{n}$ плоскости, в которой лежит сечение γ, будет меняться и нормальная кривизна $\tilde{k}=\tilde{k}(\gamma)$; она будет теперь «следить» не только за формой нормального сечения, но и за его направлением вогнутости. Так, например, если поверхность в точке M_0 имеет форму седла, как на рис. 3.24, то для сечения γ_1 нормальная кривизна $\tilde{k}_1$ будет положительна, поскольку вектор $\boldsymbol{\nu}_1$ главной нормали к γ_1 совпадает с $\mathbf{n}$, а для сечения γ_2 нормальная кривизна $\tilde{k}_2$ будет отрицательна, поскольку $\boldsymbol{\nu}_2=-\mathbf{n}$.

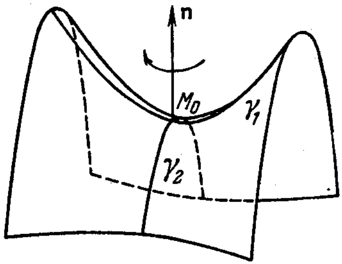


Рис. 3.24.

В дальнейшем, говоря о нормальных сечениях поверхности, мы будем рассматривать только соответствующую нормальную кривизну (3.48), а не кривизну, определяемую формулой (3.47). Эту нормальную кривизну мы будем дальше обозначать просто буквой k, опуская значок $\sim$ над ней.

Величину

$$R=\frac{1}{k}$$

мы будем называть *радиусом нормальной кривизны* поверхности Σ (в данной точке и в данном направлении). Неотрицательная величина $|R|$ есть, очевидно, радиус кривизны соответствующего нормального сечения. Поскольку k может обращаться в нуль, для R мы должны допускать и бесконечные значения.

Выведем теперь формулу для вычисления нормальной кривизны k. Для этого воспользуемся уравнением (3.46) кривой γ и вычислим $\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$. Введем для сокращения записи обозначения

$$\mathbf{r}_{uu}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2},\quad \mathbf{r}_{uv}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\,\partial v},\quad \mathbf{r}_{vv}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}.$$

Из уравнения (3.46) кривой γ получим, что

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}=\frac{d}{dl}\left(\mathbf{r}_u\frac{du}{dl}+\mathbf{r}_v\frac{dv}{dl}\right)=$$
$$=\mathbf{r}_{uu}\left(\frac{du}{dl}\right)^2+2\mathbf{r}_{uv}\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl}+\mathbf{r}_{vv}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2+\mathbf{r}_u\frac{d^2u}{dl^2}+\mathbf{r}_v\frac{d^2v}{dl^2}. \quad (3.49)$$

Векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ лежат в касательной плоскости. Следовательно, они ортогональны $\mathbf{n}$, т. е.

$$(\mathbf{r}_u,\ \mathbf{n})=(\mathbf{r}_v,\ \mathbf{n})=0.$$

Поэтому, подставив в формулу (3.48) выражение (3.49) для $\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$, получим

$$k=\frac{1}{R}=\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2},\ \mathbf{n}\right)=$$
$$=(\mathbf{r}_{uu},\ \mathbf{n})\left(\frac{du}{dl}\right)^2+2(\mathbf{r}_{uv},\ \mathbf{n})\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl}+(\mathbf{r}_{vv},\ \mathbf{n})\left(\frac{dv}{dl}\right)^2. \qquad (3.50)$$

2. Вторая квадратичная форма поверхности. Запишем полученную нами формулу (3.50) нормальной кривизны поверхности в более удобном виде. Введя обозначения

$$b_{11}=(\mathbf{r}_{uu},\ \mathbf{n}),\quad b_{12}=(\mathbf{r}_{uv},\ \mathbf{n}),\quad b_{22}=(\mathbf{r}_{vv},\ \mathbf{n}), \qquad (3.51)$$

перепишем равенство (3.50) следующим образом:

$$k=\frac{1}{R}=\frac{b_{11}\,du^2+2b_{12}\,du\,dv+b_{22}\,dv^2}{dl^2}. \qquad (3.52)$$

В знаменателе здесь стоит dl^2, т. е. первая квадратичная форма поверхности. Числитель тоже представляет собой квадратичную форму (относительно du и dv). Она называется *второй квадратичной формой поверхности* и играет в теории поверхностей (наряду с первой квадратичной формой) фундаментальную роль. Вторую квадратичную форму поверхности мы будем в дальнейшем обозначать символом φ_2. Таким образом,

$$\varphi_2=b_{11}du^2+2b_{12}\,du\,dv+b_{22}\,dv^2,$$

где b_{11}, b_{12} и b_{22} определены равенствами (3.51).

Пример. Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$z=f(x,\ y),$$

т. е. в векторной форме

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+f(x,\ y)\mathbf{k}.$$

Здесь

$$\mathbf{r}_{xx}=f''_{xx}\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_{xy}=f''_{xy}\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_{yy}=f''_{yy}\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$b_{11}=f''_{xx}\cos(\mathbf{n},\ z),\quad b_{12}=f''_{xy}\cos(\mathbf{n},\ z),\quad b_{22}=f''_{yy}\cos(\mathbf{n},\ z),$$

т. е.

$$\varphi_2=\left(f''_{xx}\,dx^2+2f''_{xy}\,dx\,dy+f''_{yy}\,dy\right)\cos(\mathbf{n},\ z). \qquad (3.53)$$

Таким образом, в этом случае вторая квадратичная форма представляет собой, с точностью до множителя $\cos(\mathbf{n},\ z)$, совокупность членов второго порядка в разложении функции $z=f(x,\ y)$ по формуле Тейлора.

Замечание. Мы уже видели, что первая квадратичная форма определяет «метрику» поверхности: с ее помощью на поверхности измеряются длины, углы и площади. Вычисление этих величин опиралось, по существу, на возможность заменять в первом приближении бесконечно малый элемент поверхности соответствующим элементом касательной плоскости. Вторая квадратичная форма — это мера того, насколько поверхность уклоняется в окрестности данной точки от касательной плоскости, проведенной через эту точку.

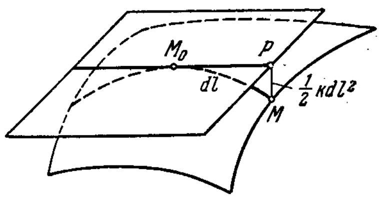


Рис. 3.25.

Чтобы убедиться в этом, вычислим расстояние между близкой к M_0 точкой M поверхности Σ и касательной плоскостью, проведенной в точке M_0 (рис. 3.25). Рассмотрим проходящее через точки M_0 и M нормальное сечение. Искомое расстояние равно, очевидно, расстоянию MP от M до касательной к кривой γ. Но это расстояние с точностью до малых высшего порядка (см. п. 6 § 2) равно

$$\frac{1}{2}k\,dl^2 = \frac{1}{2}(b_{11}\,du^2 + 2b_{12}\,du\,dv + b_{22}\,dv^2),$$

причем знак этого выражения указывает направление, в котором поверхность отходит от касательной плоскости.

Можно было бы само понятие второй квадратичной формы ввести, исходя из задачи о вычислении расстояния от точки поверхности до касательной плоскости, проведенной через близкую точку.

Упражнения. 1. Показать, что для плоскости (при любой ее параметризации) вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

2. Вычислить вторую квадратичную форму для тора в координатах φ и ψ (см. пример 1 п. 1 § 3).

3. Индикатриса кривизны. Радиус кривизны $R = \frac{1}{k}$ нормального сечения γ в точке M_0 зависит от направления, в котором проведено сечение γ. Чтобы изобразить эту зависимость наглядно, воспользуемся следующим приемом. Отложим от точки M_0 на касательной плоскости в каждом направлении вектор $\boldsymbol{\rho}$, длина которого равна $\sqrt{|R|}$, где R — радиус нормальной кривизны поверхности в этом направлении. Этот вектор можно, очевидно, записать в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \sqrt{|R|}\,\boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к соответствующему нормальному сечению.

Геометрическое место концов этих векторов представляет собой некоторую кривую, лежащую в плоскости, касательной к Σ в точке M_0 (рис. 3.26). Эта кривая называется *индикатрисой кривизны* поверхности Σ в данной точке. Найдем уравнение индикатрисы кривизны.

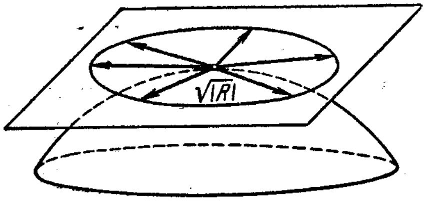


Рис. 3.26.

Примем за координатные векторы в касательной плоскости $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Так как

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{dl}=\mathbf{r}_u\frac{du}{dl}+\mathbf{r}_v\frac{dv}{dl},$$

то

$$\rho=\sqrt{|R|}\,\frac{du}{dl}\,\mathbf{r}_u+\sqrt{|R|}\,\frac{dv}{dl}\,\mathbf{r}_v,$$

т. е. каждая точка индикатрисы кривизны имеет, в выбранном базисе, координаты

$$\xi=\sqrt{|R|}\,\frac{du}{dl}\quad\text{и}\quad\eta=\sqrt{|R|}\,\frac{dv}{dl}.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{R}=b_{11}\left(\frac{du}{dl}\right)^2+2b_{12}\frac{du}{dl}\,\frac{dv}{dl}+b_{22}\left(\frac{dv}{dl}\right).$$

Умножив его на $|R|$, получаем, что

$$b_{11}\left(\sqrt{|R|}\,\frac{du}{dl}\right)^2+2b_{12}\left(\sqrt{|R|}\,\frac{du}{dl}\right)\left(\sqrt{|R|}\,\frac{dv}{dl}\right)+$$
$$+b_{22}\left(\sqrt{|R|}\,\frac{dv}{dl}\right)^2=\pm 1,$$

т. е. что ξ и η удовлетворяют уравнению

$$b_{11}\xi^2+2b_{12}\xi\eta+b_{22}\eta^2=\pm 1. \tag{3.54}$$

Это — уравнение некоторой центральной кривой второго порядка с центром в начале координат *).

Таким образом, индикатриса кривизны представляет собой центральную кривую второго порядка **) с центром, находящимся в рассматриваемой точке поверхности.

4. Главные направления и главные кривизны поверхности. Формула Эйлера. Уравнение индикатрисы кривизны, как и уравнение всякой центральной кривой второго порядка, можно привести

---

*) Последнее видно из того, что в уравнении отсутствуют члены первой степени.

**) Точнее, здесь имеются две такие кривые: $b_{11}\xi^2+2b_{12}\xi\eta+b_{22}\eta^2=1$ и $b_{11}\xi^2+2b_{12}\xi\eta+b_{22}\eta^2=-1$, уравнения которых отличаются лишь свободным членом. Подробнее о виде индикатрисы кривизны см. п. 7.

к главным осям, т. е. вместо базисных векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ можно выбрать в касательной плоскости два других базисных вектора так, чтобы они были взаимно ортогональными и единичными и чтобы в уравнении индикатрисы кривизны отсутствовал член с произведением координат. Для этого нужно, чтобы новые базисные векторы были направлены по главным осям индикатрисы кривизны. Эти два направления мы назовем *главными направлениями* нашей поверхности (в данной точке).

При таком выборе системы координат в касательной плоскости уравнение индикатрисы принимает вид

$$px^2+qy^2=\pm 1. \tag{3.55}$$

Пусть φ — угол между главным направлением, принятым за направление оси x, и произвольным нормальным сечением. Тогда, очевидно,

$$x=\sqrt{|R|}\cos\varphi, \qquad y=\sqrt{|R|}\sin\varphi,$$

где R — радиус кривизны данного нормального сечения. Подставив эти выражения x и y в уравнение (3.55) и вспомнив, что правая часть этого уравнения представляет собой отношение $|R|$ к R, получим

$$p\cos^2\varphi+q\sin^2\varphi=\frac{1}{R}=k. \tag{3.56}$$

Назовем *главными кривизнами* $k_1=\frac{1}{R_1}$ и $k_2=\frac{1}{R_2}$ поверхности в данной точке нормальные кривизны, отвечающие главным направлениям индикатрисы кривизны в этой точке. В выбранной нами системе координат это — направления $\varphi=0$ и $\varphi\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$k_1=p, \qquad k_2=q.$$

Таким образом, равенство (3.60) принимает вид

$$k=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi, \tag{3.57}$$

или

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{R_2}\sin^2\varphi. \tag{3.57$'$}$$

Это — так называемая ф о р м у л а Э й л е р а. Она дает выражение нормальной кривизны поверхности по любому направлению через главные кривизны.

Из формулы Эйлера сразу видно, что главные кривизны — это экстремальные значения нормальной кривизны. Действительно, если $k_1=k_2$, то k не зависит от φ и здесь любое направление будет экстремальным *). Пусть $k_1 \neq k_2$, например $k_1 > k_2$. Тогда $k_1 - k_2 > 0$ и, переписывая формулу Эйлера в виде

$$k = (k_1 - k_2)\cos^2\varphi + k_2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (k_1 - k_2)\cos^2\varphi + k_2,$$

получаем, что $k_1 \geqslant k \geqslant k_2$ при каждом φ.

Эти экстремальные свойства главных кривизн дают удобный способ для их фактического вычисления.

5. Вычисление главных кривизн. Из формулы Эйлера (3.57) легко усмотреть, как нормальная кривизна $k(\varphi)$ зависит от направления φ. График зависимости k от φ изображен на рис. 3.27. Из него видно, что при каждом заданном k_0, $k_1 > k_0 > k_2$, существуют четыре значения угла φ, при которых $k(\varphi) = k_0$. Так как углы, отличающиеся на π, определяют одно и то же нормальное сечение, то каждому k_0 отвечают два нормальных сечения, для которых нормальная кривизна равна k_0. Но если $k_0 = k_1$ или $k_0 = k_2$, то эти два нормальных сечения сливаются в одно. Иными словами, *главные кривизны — это те значения нормальной кривизны, каждому из которых отвечает одно и только одно нормальное сечение нашей поверхности.* Формулу (3.52) для определения нормальной кривизны как функции направления можно переписать так:

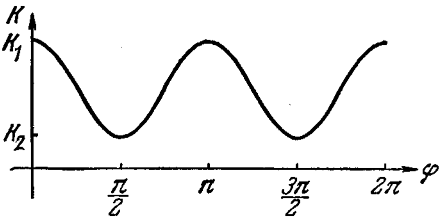


Рис. 3.27.

$$(b_{11} - kg_{11})\,du^2 + 2(b_{12} - kg_{12})\,du\,dv + (b_{22} - kg_{22})\,dv^2 = 0,$$

или, деля на dv^2 и полагая $\frac{du}{dv} = t$ (где t определяет сечение),

$$(b_{11} - kg_{11})t^2 + 2(b_{12} - kg_{12})t + (b_{22} - kg_{22}) = 0. \qquad (3.58)$$

В соответствии с изложенным выше это квадратное уравнение для t, отвечающих главным направлениям и только для них, имеет не два, а лишь один корень. Для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения (3.58) обращался в нуль.

*) Точка, в которой $k_1 = k_2$, называется *точкой округления* или *омбилической точкой*. Можно показать, что единственная поверхность, целиком состоящая из точек округления, — это сфера.

Итак, для нахождения главных кривизн мы получаем уравнение

$$(b_{12}-kg_{12})^2-(b_{11}-kg_{11})(b_{22}-kg_{22})=0, \tag{3.59}$$

или

$$\begin{vmatrix} b_{11}-kg_{11} & b_{12}-kg_{12} \\ b_{12}-kg_{12} & b_{22}-kg_{22} \end{vmatrix}=0. \tag{3.59'}$$

6. Полная кривизна и средняя кривизна. Во многих случаях вместо главных кривизн k_1 и k_2 удобнее рассматривать их произведение

$$K=k_1k_2 \tag{3.60}$$

и полусумму

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2). \tag{3.61}$$

K называется *полной* или *гауссовой кривизной* поверхности, а H — ее *средней кривизной*.

Из квадратного уравнения (3.59′) сразу получаем формулы

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}, \qquad H=\frac{g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{22}b_{11}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}. \tag{3.62}$$

Пример. Вычислить полную и среднюю кривизны для гиперболического параболоида $z=x^2-y^2$.

Решение. $g_{11}=1+4x^2$, $g_{12}=-4xy$, $g_{22}=1+4y^2$; $b_{11}=2$, $b_{12}=0$, $b_{22}=-2$. Значит,

$$K=\frac{-4}{1+4x^2+4y^2}, \quad H=\frac{4(x^2-y^2)}{1+4x^2+4y^2}.$$

В частности, в начале координат $K=-4$, $H=0$.

7. Классификация точек на поверхности. Каждой точке M_0 дважды непрерывно дифференцируемой поверхности Σ мы сопоставили определенную кривую — индикатрису кривизны в этой точке. Уравнение индикатрисы можно, как мы знаем, привести к виду

$$k_1x^2+k_2y^2=\pm 1, \tag{3.63}$$

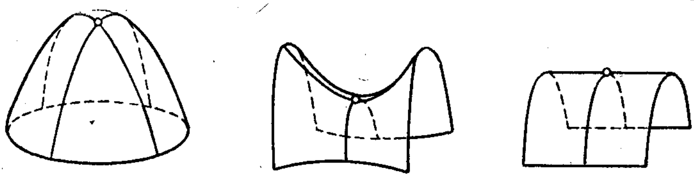
где k_1 и k_2 — главные кривизны нашей поверхности в точке M_0. Тип кривой (3.63) зависит от знака произведения k_1k_2. Рассмотрим возможные здесь три случая.

1) $k_1k_1>0$. Можно считать, что $k_1>0$, $k_2>0$, так как, изменив направление нормального вектора $\mathbf{n}$, мы можем изменить знаки у k_1 и k_2 на противоположные. При $k_1>0$ и $k_2>0$ уравнение (3.63) определяет эллипс, если в нем справа стоит $+1$, а уравнение, в котором справа стоит -1, никакой кривой не соответствует.

Точки, в которых $k_1k_2>0$ (т. е. индикатриса кривизны — эллипс), называются *эллиптическими точками*.

2) $k_1k_2 < 0$. В этом случае уравнение (3.63) определяет гиперболу или, точнее говоря, две гиперболы с общими асимптотами. Одна из них отвечает правой части $+1$, а другая — правой части -1. Точки, в которых $k_1k_2 < 0$ (индикатриса кривизны — пара гипербол), называются *гиперболическими*.

3) $k_1k_2 = 0$. Если при этом одна из главных кривизн отлична от нуля, то уравнение (3.63) определяет пару параллельных прямых.



а) б) в)

Рис. 3.28.

Точки, в которых $k_1k_2 = 0$ (но одна из главных кривизн отлична от нуля), называются *параболическими*.

Если в данной точке $k_1 = k_2 = 0$, то в ней понятие индикатрисы кривизны теряет смысл. Точки, где $k_1 = k_2 = 0$, называются *точками уплощения* поверхности.

Итак, тип точки определяется знаком полной кривизны $K = k_1k_2$ в этой точке. Поскольку

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

а величина $g_{11}g_{12} - g_{12}^2$ всегда положительна, то тип точки определяется знаком дискриминанта $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ второй квадратичной формы.

Легко представить себе строение поверхности в окрестности точки каждого из трех типов. Пусть точка M_0 — эллиптическая. Тогда k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, а следовательно, в силу формулы Эйлера, все нормальные кривизны в данной точке имеют одинаковые знаки. Геометрически это означает, что в рассматриваемой точке все нормальные сечения имеют одно и то же направление вогнутости. В окрестности эллиптической точки поверхность похожа на эллипсоид и имеет вид, изображенный на рис 3.28, *а*.

Рассмотрим теперь гиперболическую точку. В ней главные кривизны имеют разные знаки. Поэтому здесь существуют нормальные сечения с различными направлениями вогнутости. Поверхность в окрестности такой точки имеет седлообразный вид (см. рис. 3.28, *б*).

Несколько сложнее строение поверхности в окрестности параболической точки. Здесь имеется одно направление, по которому нормальная кривизна равна нулю. По всем остальным направлениям нормальная кривизна имеет один и тот же знак. Типичным примером параболической точки является любая точка обыкновенно круглого цилиндра (см. рис. 3.28, *в*), однако возможны и другие случаи, на которых мы не будем останавливаться.

Рассмотрим следующий пример. Пусть поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y)$$

и пусть в точке (x_0, y_0) выполнены необходимые условия экстремума, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Тогда нормаль к поверхности в этой точке совпадает с направлением оси z и, как показывает простое вычисление, коэффициенты второй квадратичной формы поверхности в этой точке равны

$$b_{11} = f''_{xx}, \quad b_{12} = b_{21} = f''_{xy}, \quad b_{22} = f''_{yy}$$

и, следовательно,

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = f''_{xy}f''_{yy} - f^2_{xy}. \tag{3.64}$$

Мы видим, что тип рассматриваемой точки определяется знаком выражения (3.64). Но, как известно, знаком этого же выражения определяется наличие или отсутствие экстремума в данной точке. Таким образом, мы получаем следующие связи между типом точки и наличием или отсутствием в этой точке экстремума:

эллиптическая точка — экстремум есть $\left(f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0\right)$,
гиперболическая точка — экстремума нет $\left(f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0\right)$,
параболическая точка — неопределенный случай

$$\left(f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy} = 0\right).$$

Упражнение. Каков тип точек, лежащих на: 1) эллипсоиде, 2) двуполостном гиперболоиде, 3) однополостном гиперболоиде, 4) эллиптическом параболоиде, 5) гиперболическом цилиндре.

8. Первая и вторая квадратичные формы как полная система инвариантов поверхности. Мы ввели для поверхностей первую квадратичную форму и показали, что эта форма определяет на поверхности длины, углы и площади. Далее, мы показали, что вторая квадратичная форма определяет нормальные кривизны поверхности, т. е. вид поверхности в окрестности каждой точки. Естественно поставить следующий вопрос: в какой мере поверхность определяется своими двумя квадратичными формами. Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 3.2. *Если на поверхностях Σ и Σ^* можно ввести координаты u и v и, соответственно, u^* и v^* так, чтобы в тех точках, в которых $u = u^*$, $v = v^*$, совпадали бы и соответ-*

ствующие квадратичные формы, т. е. чтобы в этих точках выполнялись равенства

$$g_{11} = g_{11}^*, \quad g_{12} = g_{12}^*, \quad g_{22} = g_{22}^*;$$
$$b_{11} = b_{11}^*, \quad b_{12} = b_{12}^*, \quad b_{22} = b_{22}^*,$$

то такие две поверхности конгруэнтны, т. е. могут отличаться друг от друга только положением в пространстве.

Таким образом, первая и вторая квадратичные формы играют для поверхностей ту же роль, что и натуральные уравнения для кривой: они образуют *полную систему инвариантов*, определяющую поверхность с точностью до ее положения в пространстве.

Мы не будем проводить здесь доказательство сформулированной теоремы. Его можно найти почти во всех учебниках дифференциальной геометрии*).