§ 6. Понятие о внутренней геометрии поверхности

1. Наложимость поверхностей. Необходимое и достаточное условие наложимости. Выше мы рассматривали поверхности как твердые тела, считая, что они могут перемещаться в пространстве, но не меняют свою форму. В некоторых случаях естественнее, однако, другая точка зрения, состоящая в том, что поверхности рассматриваются как нерастяжимые, но абсолютно гибкие пленки. При этом изучаются те свойства поверхности, которые не меняются при ее изгибании, т. е. при деформациях, не связанных с растяжением.

Если одна поверхность может быть совмещена с другой при помощи изгибания, то эти поверхности называются *наложимыми* друг на друга. Иначе говоря, две поверхности называются наложимыми друг на друга, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы линии, переходящие друг в друга при этом соответствии, имели одну и ту же длину.

Естественно возникает вопрос: каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две поверхности были наложимы друг на друга. Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 3.3. *Для того чтобы две поверхности Σ и Σ^* были наложимы друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы эти поверхности допускали такую параметризацию u, v, при которой в точках $M \in \Sigma$ и $M^* \in \Sigma^*$, имеющих одинаковые координаты u, v, соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм были бы равны.*

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна: если такая параметризация возможна, то, поставив в соответствие друг другу те точки поверхностей Σ и Σ^*, которые имеют одинаковые координаты u, v, мы получим в соответствующих точках одинаковые коэффициенты первых квадратичных форм

$$g_{11} = \overset{*}{g}_{11}, \quad g_{12} = \overset{*}{g}_{12}, \quad g_{22} = \overset{*}{g}_{22}.$$

Но тогда, параметризовав две соответствующие друг другу линии на этих поверхностях с помощью одного и того же параметра t (т. е. так, чтобы

---

*) См., например, А. П. Норден, Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, 1948, стр. 188.

в соответствующих друг другу точках этих линий значение параметра было одно и то же), мы получим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}^*\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt, \qquad (3.65)$$

т. е. что длины этих дуг равны.

Обратно, если две поверхности Σ и Σ^* наложимы друг на друга, то на этих поверхностях можно ввести общую параметризацию, введя каким-либо образом координаты u, v на поверхности Σ и считая, что точка $M^* \in \Sigma^*$ имеет те же внутренние координаты u, v, что и отвечающая ей точка M. Рассмотрим теперь на поверхностях Σ и Σ^* две отвечающие друг другу линии и параметризуем их так, чтобы их точки, совпадающие при наложении, отвечали одному и тому же значению параметра t. Тогда равенство длин дуг этих кривых запишется в виде (3.65). Так как это равенство будет иметь место при всех t_1 и t_2, то из него получим

$$g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2 = g_{11}^*\, du^2 + 2g_{12}^*\, du\, dv + g_{22}^*\, du^2.$$

Но это последнее равенство должно выполняться тождественно по du и dv, так как оно справедливо для любых соответствующих друг другу кривых, проходящих через любые точки и в любых направлениях. Тождественное равенство двух квадратичных форм влечет совпадение их коэффициентов. Таким образом,

$$g_{11} = g_{11}^*, \quad g_{12} = g_{12}^*, \quad g_{22} = g_{22}^*,$$

что и требовалось доказать.

2. Внутренняя геометрия поверхности. Совокупность тех свойств поверхности, которые не меняются при ее изгибании, называется внутренней геометрией поверхности. Мы сейчас показали, что две поверхности изгибаемы друг в друга в том и только том случае, если на них можно ввести одну и ту же первую квадратичную форму. Следовательно, к внутренней геометрии поверхности относятся те и только те ее свойства *), которые могут быть выражены через первую квадратичную форму. Таким образом, *внутренняя геометрия поверхности определяется ее первой квадратичной формой.* К внутренней геометрии поверхности относятся, следовательно, длины линий, лежащих на поверхности. Далее, поскольку угол между линиями на поверхности и площадь поверхности выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы (см. п. 2 и 4 § 4), то эти величины также относятся к внутренней геометрии.

Замечательно то обстоятельство, что внутренним свойством поверхности является и ее полная кривизна K. Именно, Гауссом была получена для полной кривизны в ортогональных координатах следующая формула:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right)\right\},$$

в которую входят только коэффициенты первой квадратичной формы. В то же время ни средняя кривизна, ни главные кривизны при изгибании не сохраняются.

---

*) Речь идет, конечно, о тех свойствах, которые относятся к самой поверхности и не зависят от выбора ее параметризации.

Сам термин «внутренняя геометрия» применительно к свойствам, сохраняющимся при изгибании поверхности, означает, что они присущи именно самой поверхности и не связаны с ее вложением в пространство. Поясним это следующим «мысленным экспериментом». Представим себе, что поверхность населена некими двумерными существами, достаточно разумными, но не имеющими никаких выходов в окружающее эту поверхность пространство. Такие существа могли бы построить геометрию своего «мира», назвав «прямой», проходящей через две точки, кратчайшую из всех линий (лежащих целиком на поверхности), проходящих через эти точки (например, на сфере такой «прямой» будет дуга большого круга), и, далее, определить «треугольники», «многоугольники» и т. д. и изучать свойства этих фигур (не выходя в окружающее поверхность пространство). Та геометрия, которая при этом получилась бы, и является внутренней геометрией нашей поверхности. При этом наши гипотетические существа никоим образом не смогли бы отличить одну поверхность от любой другой, на нее наложимой*). Например, внутренняя геометрия плоскости — это обычная планиметрия, которую все изучают в школе. Однако все теоремы планиметрии останутся верны, если вместо плоскости рассматривать любую наложимую на нее поверхность, скажем параболический цилиндр. А вот внутренняя геометрия сферы существенно отличается от геометрии плоскости: например, на сфере сумма углов треугольника всегда больше, чем π.

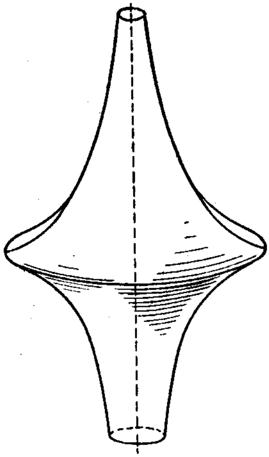

Рис. 3.29.

3. Поверхности постоянной кривизны. Рассмотрим поверхность, полная кривизна K которой в каждой точке имеет одно и то же значение. Такие поверхности называются *поверхностями постоянной кривизны*. Из инвариантности полной кривизны при изгибаниях следует, что две поверхности постоянной кривизны наложимы друг на друга только тогда, когда их кривизны равны. Можно показать, что верно и обратное: две поверхности одной и той же постоянной кривизны наложимы друг на друга. Таким образом, каждая из этих поверхностей полностью (с точки зрения внутренней геометрии) характеризуется одним числом — своей полной кривизной K.

Геометрические свойства поверхности постоянной кривизны существенно зависят от знака кривизны, поэтому следует отдельно рассматривать поверхности положительной, нулевой и отрицательной кривизны.

Поверхностью нулевой кривизны является плоскость. Ее внутренняя геометрия — это обычная планиметрия. Ту же самую внутреннюю геометрию имеет и любая другая поверхность нулевой кривизны.

«Канонической моделью» поверхности положительной кривизны K может служить сфера радиуса $R=\dfrac{1}{\sqrt{K}}$. Внутренняя геометрия этой поверхности

*) Соображения о том, когда возможно, а когда невозможно «внутренним образом» отличить прямое от кривого, имеют смысл не только применительно к двумерным объектам — поверхностям, но и для объектов большей размерности, в частности и для трехмерного пространства. Эти вопросы очень важны с точки зрения общих представлений о вселенной. К сожалению, мы не имеем возможности здесь их рассматривать.

отлична от привычной нам планиметрии: если под «прямыми» понимать кратчайшие линии (т. е. в случае сферы дуги больших кругов), то верны следующие утверждения: любые две «прямые» при неограниченном их продолжении пересекаются, сумма углов треугольника больше двух прямых и т. д.

Поверхностью постоянной отрицательной кривизны $K < 0$ является так называемая *псевдосфера*, которая изображена на рис. 3.29. Она представляет собой поверхность, образованную вращением трактрисы, т. е. кривой, определяемой уравнениями

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right), \quad y = a\sin t.$$

Изображенная на рис. 3.29 поверхность не гладкая: она имеет ребро. Это обстоятельство не случайно: можно показать, что в трехмерном пространстве не существует неограниченно продолжимой гладкой поверхности, имеющей постоянную отрицательную кривизну. Внутренняя геометрия псевдосферы отлична и от обычной планиметрии и от геометрии на сфере. Она совпадает с так называемой *геометрией Лобачевского*, в которой сумма углов треугольника меньше двух прямых, через данную точку проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную, и т. п. Не имея возможности останавливаться здесь на всех этих вопросах (имеющих, между прочим, глубокие связи с современными физическими представлениями, в частности с теорией относительности), мы отсылаем интересующегося ими чатателя к соответствующей специальной литературе *).

*) См., например, Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, Физматгиз, 1961.