ГЛАВА 1

Многообразия

В настоящей главе излагаются элементы теории многообразий и формулируются основные теоремы. В ней рассматриваются производные Ли, определенные с помощью локальных однопараметрических групп преобразований, различные интерпретации скобки векторных полей, а также дается очерк теории Фробениуса об интегрируемости распределений p-плоскостей [4, 22, 33, 63, 80, 94, 95].

1.1. Вводный материал и обозначения

Пусть φ — отображение из M в N, а ψ — отображение из P в T, тогда $\psi\circ\varphi$ будет обозначать их композицию: за φ следует ψ. Здесь M, N, P, T — произвольные множества, причем подразумевается, что областью определения отображения $\psi\circ\varphi$ служит $\varphi^{-1}(P)\cap M$ (в частности, $\psi\circ\varphi$ может иметь пустую область определения). Аналогичное соглашение, а именно что область определения есть наибольшее допустимое множество, будет применяться при образовании сумм, произведений и других комбинаций отображений. Если $U\subset M$, то через $\varphi|_U$ мы будем обозначать сужение отображения φ на U.

Евклидово d-мерное пространство, которое будет обозначаться через R^d, снабжается обычными координатными функциями $\{u_i\}$, так что если $t=(t_1, \ldots, t_d)\in R^d$, то $u_i(t)=t_i$. В случае $d=1$ пишут $R^1=R$ и $u_1=u$. Если U — открытое подмножество в R^d, то говорят, что отображение $\varphi: U\to R^d$ принадлежит *классу* C^∞ (т. е. $\varphi\in C^\infty$), если вещественные функции $u_i\circ\varphi$, $i=1,\ldots,d$, имеют все k-е непрерывные частные производные при любом неотрицательном k.

Как показывает следующий пример, C^∞-отображения не обязательно аналитичны: $f(x)=\exp(-1/x^2)$, если $x\neq 0$, $f(0)=0$. В действительности существуют нетривиальные вещественные C^∞-функции на R^d, которые обращаются в нуль вне компактного множества (см. [72],

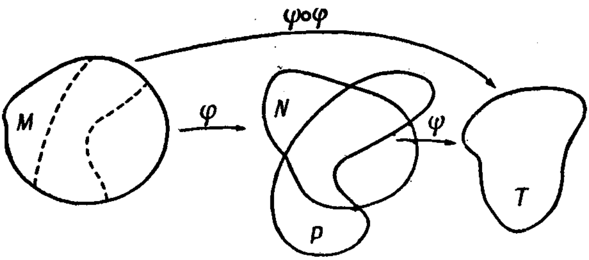

Рис. 1.

стр. 33, где приводится конструкция урысоновских C^∞-функций).

Задача 1. Положим

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x), & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Пусть $\{r_n\}$ — множество всех рациональных чисел, расположенных в некотором порядке, и

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f(x-r_n).$$

Показать, что $g\in C^\infty$, но нигде не аналитично.

1.2. Определение многообразия

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство; *d-мерная координатная система* в X — это гомеоморфизм открытого подмножества X на открытое подмножество R^d. X называется *d-мерным топологическим многообразием*, если X покрывается областями определения d-мерных координатных систем. Область определения координатной системы φ называется *координат-*