Как показывает следующий пример, C^∞-отображения не обязательно аналитичны: $f(x)=\exp(-1/x^2)$, если $x\neq 0$, $f(0)=0$. В действительности существуют нетривиальные вещественные C^∞-функции на R^d, которые обращаются в нуль вне компактного множества (см. [72],

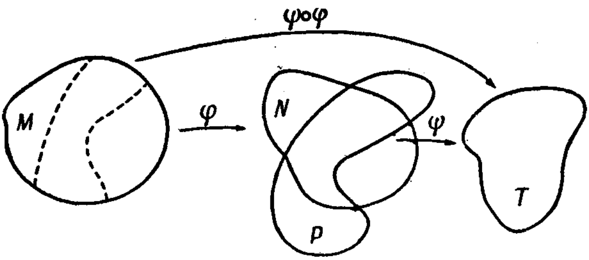


Рис. 1.

стр. 33, где приводится конструкция урысоновских C^∞-функций).

Задача 1. Положим

$$f(x)=\begin{cases} \exp(-1/x), & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x\leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $\{r_n\}$ — множество всех рациональных чисел, расположенных в некотором порядке, и

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x-r_n).$$

Показать, что $g\in C^\infty$, но нигде не аналитично.

1.2. Определение многообразия

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство; *d-мерная координатная система* в X — это гомеоморфизм открытого подмножества X на открытое подмножество R^d. X называется *d-мерным топологическим многообразием*, если X покрывается областями определения d-мерных координатных систем. Область определения координатной системы φ называется *координат-*

ной окрестностью; если x принадлежит этой координатной окрестности, то говорят, что φ — *координатная система в* x.

Если φ — координатная система, то функции $(u_1 \circ \varphi, \ldots, u_d \circ \varphi)$ часто обозначают через $(x_1, \ldots, x_d)$. Систему $(x_1, \ldots, x_d)$, так же как и φ, мы будем называть координатной системой.

Пусть φ, ψ — некоторые d-мерные координатные системы на X. Тогда φ и ψ называются C^∞*-связанными*,

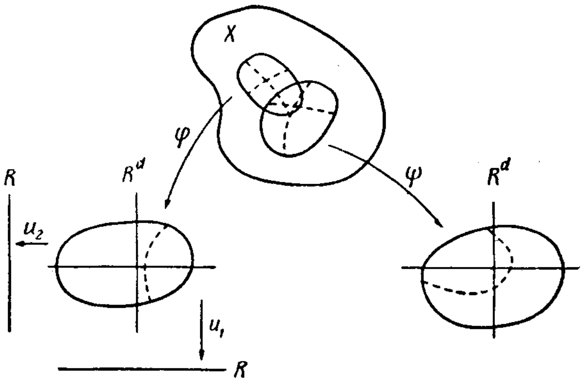


Рис. 2.

если и $\varphi \circ \psi^{-1}$, и $\psi \circ \varphi^{-1}$ принадлежат классу C^∞. (См. рис. 2.)

Рассмотрим следующие свойства множества координатных систем $\mathscr{C}$ на топологическом многообразии X:

(1) X покрыто областями определения координатных систем из $\mathscr{C}$.

(2) Каждая пара координатных систем из $\mathscr{C}$ является C^∞-связанной.

(3) Множество $\mathscr{C}$ максимально по отношению к свойствам (1) и (2).

C^∞*-многообразие* (или просто *многообразие*) — это пара $(X, \mathscr{C})$, где X — топологическое многообразие, а $\mathscr{C}$ — некоторое множество координатных систем, удовлетворяющее условиям (1), (2) и (3). Множество $\mathscr{C}$ называется C^∞*-структурой* на X. (В дальнейшем мы будем обычно опускать символ $\mathscr{C}$ и обозначать многообразие просто через X.) *Базис* C^∞-*структуры* $\mathscr{C}$ — это подмножество $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$, удовлетворяющее условиям (1) и (2).

Если на *множестве* X задана совокупность координатных систем $\mathscr{C}_0$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), то требованием, чтобы они являлись гомеоморфизмами, определяется топология на X, так что X становится топологическим многообразием. При этом на X существует единственная C^∞-структура $\mathscr{C}$ с базисом $\mathscr{C}_0$: она получается присоединением всех C^∞-связанных координатных систем. (Мы пренебрегли требованием, чтобы X было хаусдорфовым пространством.)

Если M, N — многообразия, то отображение $\psi: M \to N$ принадлежит *классу* C^∞ ($\psi \in C^\infty$), если для каждой пары (φ, θ) координатных систем φ на M и θ на N функция $\theta \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^∞.

Для того чтобы отображение $\psi: M \to N$ принадлежало классу C^∞, достаточно, чтобы для каждого $m \in M$ существовали координатные системы φ в m и θ в $\psi(m)$, такие, что $\theta \circ \psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$.

Пусть M паракомпактно; тогда, поскольку разложения единицы, подчиненные данному покрытию, можно строить из рациональных комбинаций функций Урысона, существуют C^∞-разложения единицы. Ввиду того что C^∞-разложения единицы необходимы для многих аналитических построений на многообразии, а также ввиду того что римановы многообразия, наша конечная цель, метризуемы и, следовательно, паракомпактны, мы будем предполагать в дальнейшем, что многообразия паракомпактны. Тогда, как доказывается в теоретико-множественной топологии, многообразия сепарабельны и потому удовлетворяют второй аксиоме счетности, если они связны.

Примеры. (1) *Евклидово пространство.* Базис $\mathscr{C}_0$, состоящий из тождественного отображения, определяет обычную C^∞-структуру на R^d.

(2) *Открытые подмногообразия.* Пусть M — многообразие с C^∞-структурой $\mathscr{C}$, пусть U — открытое подмножество в M и пусть $\mathscr{C}_0 = \{\varphi \in \mathscr{C} \mid$ (область определе-

ния $\varphi) \subset U\}$. Тогда U является многообразием с $\mathscr{C}_0$ в качестве C^∞-структуры. U называется *открытым подмногообразием* многообразия M.

(3) *Общая линейная группа* $Gl(d, R)$. Она состоит из невырожденных $d \times d$-матриц с вещественными элементами и является открытым подмножеством в R^{d^2}, поскольку

$$Gl(d, R) = R^{d^2} - \det^{-1}(0).$$

(4) *Обычная сфера.* Пусть $S^d = \{x \in R^{d+1} \mid \sum u_i^2(x) = 1\}$; определим $\varphi : S^d - \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to R^d$, $\psi : S^d - \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to R^d$ как стереографические проекции из $(0, \ldots, 0, 1)$, $(0, \ldots, 0, -1)$ соответственно. Тогда

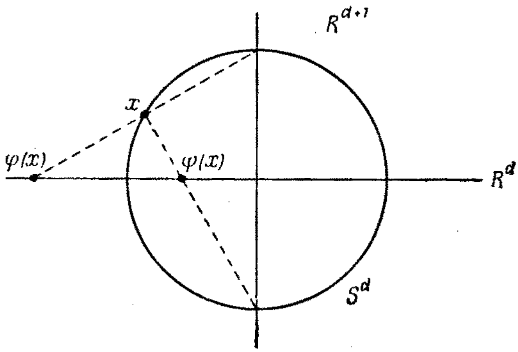


Рис. 3.

$\mathscr{C}_0 = \{\varphi, \psi\}$ является базисом C^∞-структуры на S^d. [*Стереографическая проекция*: $\varphi(x)$ есть точка, в которой прямая линия, проходящая через $(0, \ldots, 0, 1)$ и x, пересекает $u_{d+1}^{-1}(0) = R^d$.]

(5) *Вещественное проективное пространство.* Пусть P^d — вещественное проективное d-пространство, т. е. совокупность прямых, проходящих через начало в R^{d+1}. Естественное накрывающее отображение $\varphi : S^d \to P^d$, переводящее точку x в содержащую ее прямую, индуцирует C^∞-структуру на P^d; это единственная C^∞-струк-

Если $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, то *частную производную функции f по r_i в t* мы обозначаем следующим образом:

$$\left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_t (f) = \left.\frac{\partial f}{\partial r_i}\right|_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + h, t_{i+1}, \ldots, t_n) - f(t)}{h}.$$

Если $p \in \mathbb{R}^d$, то $B_p(r)$ обозначает *открытый шар* радиуса r с центром в p. Открытый шар радиуса r с центром в начале координат обозначается просто через $B(r)$. Символ $C(r)$ означает *открытый куб* со сторонами длины $2r$ и с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^d$. Таким образом,

$$C(r) = \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d : |a_i| < r \text{ для всех } i\}.$$

Через $\mathbb{C}$ будет обозначаться *поле комплексных чисел*, а через $\mathbb{C}^n$ — *комплексное n-мерное пространство*

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{C} \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Если не оговорено противное, то под *окрестностью* будет пониматься *открытая* окрестность. *Замыкание* подмножества A топологического пространства обозначается через $\bar{A}$. Если функция φ задана на топологическом пространстве X, то ее *носитель* — это подмножество

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}$$

пространства X.

Мы будем пользоваться *символом Кронекера*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — набор из d целых неотрицательных чисел, то мы положим

$$[\alpha] = \sum \alpha_i, \qquad \alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_d!$$

и

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial r_1^{\alpha_1} \ldots \partial r_d^{\alpha_d}}.$$

Если $\alpha = (0, \ldots, 0)$, то полагаем

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha}(f) = f.$$

Дифференцируемые многообразия

1.2. Определения. Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — открытое подмножество, и пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$. Мы говорим, что f — *дифференцируемая функция класса C^k на U* (или просто что *f принадлежит C^k*), где k — целое неотрицательное число, если на U существуют непрерывные частные производные $\partial^\alpha f / \partial r^\alpha$ для всех $[\alpha] \leqslant k$. В частности, f

принадлежит классу C^0, если она непрерывна. Если $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, то f называется *дифференцируемым отображением класса* C^k, если каждая из компонент $f_i = r_i \circ f$ принадлежит C^k. Мы будем говорить, что f *принадлежит классу* C^∞, если f принадлежит C^k для любого $k \geqslant 0$.

1.3. Определения. *Локально евклидово пространство* M *размерности* d — это хаусдорфово топологическое пространство M, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Если φ — гомеоморфное отображение связного открытого множества $U \subset M$ на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, то φ называют *координатным отображением*, функции $x_i = r_i \circ f$ — *координатными функциями* [1]), а пару (U, φ) (иногда обозначаемую через $(U, x_1, \ldots, x_d)$) — *системой координат*. Система координат (U, φ) называется *кубической*, если $\varphi(U)$ — открытый куб с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $m \in U$ и $\varphi(m) = 0$, то говорят, что *началом* данной системы координат является точка m.

1.4. Определения. *Дифференцируемая структура* $\mathcal{F}$ *класса* C^k $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ на локально евклидовом пространстве M — это набор систем координат $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\colon \alpha \in A\}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

(a) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ принадлежит классу C^k для всех $\alpha, \beta \in A$;

(c) семейство $\mathcal{F}$ максимально, т. е. если (U, φ) — система координат, такая, что $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ принадлежат классу C^k для всех $\alpha \in A$, то $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ — произвольный набор систем координат, удовлетворяющих условиям (a) и (b), то существует единственная дифференцируемая структура $\mathcal{F}$, содержащая $\mathcal{F}_0$. А именно, положим

$$\mathcal{F} = \{(U, \varphi) : \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ и } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ принадлежат классу } C^k \text{ для всех } \varphi_\alpha \in \mathcal{F}_0\}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ содержит $\mathcal{F}_0$; ясно, что она удовлетворяет условию (a), и нетрудно проверить, что она удовлетворяет условию (b). Набор $\mathcal{F}$ оказывается максимальным по построению, и, значит, он является дифференцируемой структурой, содержащей $\mathcal{F}_0$. Очевидно, что это единственная такая структура.

Упомянем еще два важных типа дифференцируемых структур на локально евклидовых пространствах, которые мы не будем рас-

[1]) Обычно не различают r_i и x_i. — *Прим. перев.*

сматривать в этой книге. Это структура класса C^{ω} и комплексно-аналитическая структура. Для *дифференцируемой структуры класса* C^{ω} дополнительно требуется, чтобы композиции функций в п. (b) локально задавались сходящимися степенными рядами. Для *комплексно-аналитической структуры* на локально евклидовом пространстве размерности $2d$ требуется, чтобы координатные системы задавались наборами функций со значениями в пространстве $\mathbb{C}^d$, а на пересечении координатных областей преобразования координат были голоморфны.

Дифференцируемым многообразием класса C^k *размерности* d называется пара $(M, \mathscr{F})$, состоящая из локально евклидова пространства M размерности d, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, и дифференцируемой структуры класса C^k (аналогично определяются также многообразия класса C^{ω} или комплексно-аналитические многообразия). Обычно мы будем опускать $\mathscr{F}$ и обозначать дифференцируемое многообразие $(M, \mathscr{F})$ одной буквой M, понимая, что когда мы говорим о «дифференцируемом многообразии M», то подразумеваем локально евклидово пространство M с некоторой заданной дифференцируемой структурой $\mathscr{F}$. В дальнейшем наше внимание будет направлено на случай класса C^{∞}, и под термином «дифференцируемое» мы всегда будем понимать «дифференцируемое класса C^{∞}». Дифференцируемость класса C^{∞} принято также называть *гладкостью*, и мы будем рассматривать эти термины как синонимы. Часто мы будем называть гладкие многообразия просто многообразиями, неявно предполагая дифференцируемость класса C^{∞}. Можно рассматривать многообразие как тройку, состоящую из основного точечного множества, локально евклидовой топологии на этом множестве, для которой выполняется вторая аксиома счетности, и дифференцируемой структуры. Под *структурой многообразия на множестве* X мы будем подразумевать выбор как локально евклидовой топологии, для которой выполняется вторая аксиома счетности, так и дифференцируемой структуры.

Несмотря на то что мы ограничиваемся случаем C^{∞}, многие из наших теорем имеют аналоги для случая C^k, где $k < \infty$, которые не намного сложнее, чем те, которые мы докажем. При рассмотрении случая C^k, $k < \infty$, требуется просто следить за степенью дифференцируемости, потому что, дифференцируя функцию класса C^k, мы получаем функцию лишь класса C^{k-1}, если $1 \leqslant k < \infty$.

Если не оговорено противное, буквы M и N всегда будут обозначать дифференцируемые многообразия, а символ M^d обозначает, что M — многообразие размерности d.

1.5. Примеры

(a) Стандартная дифференцируемая структура на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ получается, если в качестве $\mathscr{F}$ взять максимальный набор (в смысле п. 1.4(b)), содержащий $(\mathbb{R}^d, i)$, где $i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — тождественное отображение.

(b) Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство. Оно обладает естественной структурой многообразия. Действительно, если $\{e_i\}$ — базис пространства V, то элементы сопряженного базиса $\{r_i\}$ — это координатные функции глобальной системы координат на V. Такая глобальная система координат единственным образом определяет дифференцируемую структуру $\mathcal{F}$ на V, эта дифференцируемая структура не зависит от выбора базиса, так как замена базиса определяет преобразования координат класса C^∞. В данном случае замена координат задается постоянной невырожденной матрицей.

(c) Комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ размерности n является вещественным векторным пространством размерности $2n$ и потому (см. пример (b)) обладает естественной структурой вещественного многообразия размерности $2n$. Если $\{e_i\}$ — стандартный комплексный базис, где e_i есть n-ка, в которой на всех местах, кроме места i, стоят нули, и на i-м месте находится единица, то

$$\{e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \ldots, \sqrt{-1}e_n\}$$

будет вещественным базисом пространства $\mathbb{C}^n$, а его дуальный базис — стандартной глобальной системой координат на $\mathbb{C}^n$.

(d) *d-мерной сферой* называется множество всех точек из $\mathbb{R}^{d+1}$, таких, что

$$S^d = \left\{a \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} a_i^2 = 1\right\}.$$

Пусть $n = (0, \ldots, 0, 1)$ и $s = (0, \ldots, 0, -1)$. Мы получим на S^d стандартную дифференциальную структуру, если в качестве $\mathcal{F}$ возьмем максимальное семейство, содержащее $(S^d - n, p_n)$ и $(S^d - s, p_s)$, где p_n и p_s — стереографические проекции из n и s соответственно.

(e) Открытое подмножество U дифференцируемого многообразия $(M, \mathcal{F}_M)$ само является дифференцируемым многообразием с дифференцируемой структурой

$$\mathcal{F}_U = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha | U_\alpha \cap U) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_M\}.$$

Если не оговорено противное, открытые подмножества дифференцируемых многообразий всегда будут снабжаться такими естественными дифференцируемыми структурами.

(f) *Полная линейная группа* $GL(n; \mathbb{R})$ — это множество всех невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$. Если мы естественным образом отождествим точки пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ с вещественными матрицами размера $n \times n$, то определитель станет непрерывной функцией на пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Тогда $GL(n; \mathbb{R})$

получит структуру многообразия как открытое подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, на котором определитель не обращается в 0.

(g) *Произведение многообразий.* Пусть $(M_1, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2, \mathcal{F}_2)$ — дифференцируемые многообразия размерностей d_1 и d_2 соответственно. Тогда $M_1 \times M_2$ станет дифференцируемым многообразием размерности $d_1 + d_2$, если в качестве дифференцируемой структуры $\mathcal{F}$ взять максимальный набор, содержащий

$$\{(U_\alpha \times V_\beta,\ \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \\ \to \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}) : (U_\alpha,\ \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_1,\ (V_\beta,\ \psi_\beta) \in \mathcal{F}_2\}.$$

1.6. Определения. Пусть $U \subset M$ — открытое подмножество. Будем говорить, что $f\colon U \to \mathbb{R}$ — *функция класса C^∞ на U* (обозначение: $f \in C^\infty(U)$), если композиция $f \circ \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^∞ для каждого координатного отображения φ на M. Говорят, что непрерывное отображение $\psi\colon M \to N$ является *дифференцируемым класса C^∞* (обозначение: $\psi \in C^\infty(M, N)$ или просто $\psi \in C^\infty$), если композиция $g \circ \psi$ является функцией класса C^∞ на множестве ψ^{-1} (область определения функции g) для всех функций g класса C^∞, определенных на открытых множествах многообразия N. Это равносильно следующему: непрерывное отображение ψ принадлежит классу C^∞ тогда и только тогда, когда $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ принадлежит классу C^∞ для любых координатных отображений τ на M и φ на N. Функции и отображения класса C^∞ будем называть *гладкими.*

Очевидно, что композиция двух дифференцируемых отображений является снова дифференцируемым отображением. Заметим, что отображение $\psi\colon M \to N$ принадлежит классу C^∞ тогда и только тогда, когда для любой точки $m \in M$ существует ее открытая окрестность U, такая, что $\psi | U$ принадлежит классу C^∞.

Вторая аксиома счетности

Из того что многообразия удовлетворяют второй аксиоме счетности, вытекает много следствий, в частности нормальность, метризуемость и паракомпактность многообразий. Паракомпактность гарантирует существование разбиения единицы, исключительно полезного инструмента для построения глобальных функций и структур из локальных и, обратно, для представления глобальных структур в виде локально конечных сумм локальных структур. Сформулировав несколько необходимых определений, мы приведем простое доказательство паракомпактности многообразий, а затем докажем существование разбиения единицы. Очевидно, что многообразия — это регулярные топологические пространства. Из этого факта и из паракомпактности следует нормальность многообразий — доказательство мы оставим читателю в качестве упражнения. Доказательство того, что многообразия метризуемы, см. [13].

1.7. Определения. Набор $\{U_\alpha\}$ подмножеств многообразия M называется *покрытием* множества $W \subset M$, если $W \subset \bigcup U_\alpha$. Покрытие называется *открытым*, если каждое из подмножеств U_α открыто. Часть набора $\{U_\alpha\}$, которая тоже покрывает множество W, называется *подпокрытием*. *Измельчение* $\{V_\beta\}$ *покрытия* $\{U_\alpha\}$ — это такое покрытие, что для любого β существует α, такое, что $V_\beta \in U_\alpha$. Набор $\{A_\alpha\}$ подмножеств множества M называется *локально конечным*, если для любого элемента $m \in M$ существует его окрестность W_m, такая, что $W_m \cap A_\alpha \neq \varnothing$ лишь для конечного числа α. Топологическое пространство называется *паракомпактным*, если каждое его открытое покрытие имеет локально конечное измельчение.

1.8. Определение. *Разбиением единицы на многообразии* M называется набор $\{\varphi_i : i \in I\}$ функций класса C^∞ на M (здесь I — произвольное множество индексов, не обязательно счетное), таких, что

(a) набор носителей этих функций $\{\operatorname{supp} \varphi_i : i \in I\}$ локально конечен;

(b) $\sum\limits_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ для всех $p \in M$ и $\varphi_i(p) \geqslant 0$ для всех $p \in M$ и $i \in I$.

Говорят, что разбиение единицы $\{\varphi_i : i \in I\}$ *подчинено* покрытию $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$, если для каждого i существует α, такой, что $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_\alpha$. Разбиение единицы подчинено покрытию $\{U_i : i \in I\}$ *с тем же множеством индексов*, если $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ для каждого $i \in I$.

1.9. Лемма. *Пусть X — хаусдорфово локально компактное (каждая точка имеет по крайней мере одну компактную окрестность) топологическое пространство, для которого выполнена вторая аксиома счетности (например, многообразие). Тогда оно паракомпактно. В частности, любое его открытое покрытие имеет счетное локально конечное измельчение, состоящее из открытых множеств с компактными замыканиями.*

Доказательство. Сначала покажем, что существует последовательность $\{G_i: i = 1, 2, \ldots\}$ открытых множеств, такая, что

$$\bar{G}_i \text{ — компакт}, \quad \bar{G}_i \subset G_{i+1}, \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i. \tag{1}$$

Пусть $\{U_i: i = 1, 2, \ldots\}$ — счетная база топологии пространства X, состоящая из открытых множеств с компактными замыканиями. Такую базу всегда можно построить, начиная с любой счетной базы и выбирая в ней подпоследовательность, состоящую из множеств с компактными замыканиями. Поскольку X является хаусдорфовым и локально компактным, эта подпоследовательность сама является базой. Положим $G_1 = U_1$. Предположим, что

$$C_k = U_1 \cup \ldots \cup U_{j_k}.$$

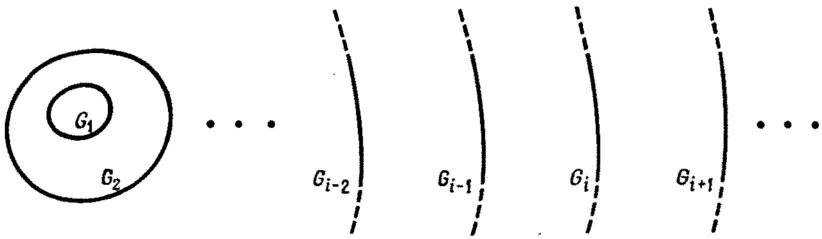
Пусть j_{k+1} — наименьшее положительное целое число, большее j_k, для которого

$$\bar{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Положим

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Итак, мы определили по индукции последовательность компактных множеств $\{G_k\}$, удовлетворяющих (1).



Пусть $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Множество $\bar{G}_i - G_{i-1}$ является компактом и содержится в открытом множестве $G_{i+1} - \bar{G}_{i-2}$. Для каждого $i \geqslant 3$ выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap \cap (G_{i+1} - \bar{G}_{i-2})\colon \alpha \in A\}$ множества $\bar{G}_i - G_{i-1}$ и выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap G_3\colon \alpha \in A\}$ компакта $\bar{G}_2$. Как легко видеть, этот набор открытых множеств счетен, является локально конечным измельчением открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ и состоит из открытых множеств с компактными замыканиями.

1.10. Лемма. *На $\mathbb{R}^d$ существует неотрицательная функция φ класса C^∞, которая равна* 1 *на замкнутом кубе $\overline{C(1)}$ и нулю на дополнении к открытому кубу C* (2).

Доказательство. Нам надо представить функцию φ в виде произведения

(1) $$\varphi = (h \circ r_1) \ldots (h \circ r_d),$$

где h — неотрицательная функция класса C^∞ на вещественной прямой, принимающая значение 1 на отрезке $[-1, 1]$ и значение нуль вне интервала $(-2, 2)$. Построение такой функции мы начнем с функции

(2) $$f(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

которая неотрицательна, принадлежит классу C^∞ и положительна при $t>0$. Тогда функция

(3) $$g(t)=\frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$$

тоже неотрицательна, принадлежит классу C^∞ и принимает значение 1 при $t\geqslant 1$ и 0 при $t\leqslant 0$. Мы получим нужную нам функцию h, если положим

(4) $$h(t)=g(t+2)\,g(2-t).$$

1.11. Теорема. (Существование разбиения единицы.) *Пусть M — гладкое многообразие и $\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует счетное разбиение единицы $\{\varphi_i\colon i=1, 2, 3, \ldots\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями $\operatorname{supp}\varphi_i$ для всех i. Если не требовать компактности носителей, то тогда существует разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ (т. е. $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset U_\alpha$), в котором не более чем счетное количество φ_α отлично от 0.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{G_i\}$ покрывает M, как в 1.9(1), и возьмем в качестве G_0 пустое множество. Для элемента $p\in M$ положим i_p равным наибольшему целому числу, при котором $p\in M-\overline{G}_{i_p}$. Выберем α_p таким, что $p\in U_{\alpha_p}$, и построим систему координат (V, τ) с началом в точке p, такую, что $V\subset U_{\alpha_p}\cap(G_{i_p+2}-\overline{G}_{i_p})$ и, кроме того, $\tau(V)$ содержит замкнутый куб $C(2)$. Положим

(1) $$\psi_p=\begin{cases}\varphi\circ\tau & \text{на } V,\\ 0 & \text{на } M-V,\end{cases}$$

где φ — функция, построенная в 1.10 (1). Поэтому ψ_p — функция класса C^∞ на M, принимающая значение 1 на некоторой открытой окрестности W_p элемента p и имеющая компактный носитель, лежащий в $V\subset U_{\alpha_p}\cap(G_{i_p+2}-\overline{G}_{i_p})$. Для каждого $i\geqslant 1$ выберем конечное множество точек p из M так, чтобы соответствующие окрестности W_p покрывали $\overline{G}_i-G_{i-1}$. Упорядочим соответствующие функции ψ_p, составив из них последовательность ψ_j,

$j = 1, 2, 3, \ldots$. Носители функций ψ_j образуют локально конечное семейство подмножеств в M. Таким образом, функция

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_j \tag{2}$$

является корректно определенной функцией класса C^∞ на M, и, кроме того, $\psi(p) > 0$ для каждого $p \in M$. Положим теперь для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\varphi_i = \psi_i/\psi. \tag{3}$$

Функции $\{\varphi_i\colon\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями $\operatorname{supp} \varphi_i$ для каждого i. Теперь возьмем в качестве φ_α функцию, тождественно равную нулю, если ни один из носителей $\operatorname{supp} \varphi_i$ не лежит в U_α, и сумму тех φ_i, чьи носители лежат в U_α, в противном случае; тогда $\{\varphi_\alpha\}$ образует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ с не более чем счетным числом ненулевых функций φ_α. Для того чтобы проверить, лежит ли носитель функции φ_α в U_α, заметим, что если $\mathscr{A}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств, то $\overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$. Отметим, что носители функций φ_α не обязательно компактны.

Следствие. *Если множество G открыто в M, а множество A замкнуто в M и, кроме того, $A \subset G$, то существует функция φ: $M \to \mathbb{R}$ класса C^∞, такая, что*

(a) $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$ *для всех* $p \in M$;

(b) $\varphi(p) = 1$, *если* $p \in A$;

(c) $\operatorname{supp} \varphi \subset G$.

Доказательство. На многообразии M существует разбиение единицы $\{\varphi, \psi\}$, подчиненное покрытию $\{G, M - A\}$, с носителями $\operatorname{supp} \varphi \subset G$ и $\operatorname{supp} \psi \subset M - A$. Эта функция φ удовлетворяет требованиям следствия.

Касательные векторы и дифференциалы

1.12. Вектор v с компонентами $v_1, \ldots, v_d$ в точке p евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать как оператор на дифференцируемых функциях. Точнее, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки p, то вектор v ставит в соответствие этой функции вещественное число $v(f)$, являющееся значением ее производной в точке p по направлению вектора v, т. е.

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1}\Big|_p + \cdots + v_d \frac{\partial f}{\partial r_d}\Big|_p. \tag{1}$$