$j = 1, 2, 3, \dots$. Носители функций ψ_j образуют локально конечное семейство подмножеств в M. Таким образом, функция

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_j \tag{2}$$

является корректно определенной функцией класса C^∞ на M, и, кроме того, $\psi(p) > 0$ для каждого $p \in M$. Положим теперь для каждого $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\varphi_i = \psi_i/\psi. \tag{3}$$

Функции $\{\varphi_i\colon i = 1, 2, 3, \dots\}$ образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями $\operatorname{supp}\varphi_i$ для каждого i. Теперь возьмем в качестве φ_α функцию, тождественно равную нулю, если ни один из носителей $\operatorname{supp}\varphi_i$ не лежит в U_α, и сумму тех φ_i, чьи носители лежат в U_α, в противном случае; тогда $\{\varphi_\alpha\}$ образует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ с не более чем счетным числом ненулевых функций φ_α. Для того чтобы проверить, лежит ли носитель функции φ_α в U_α, заметим, что если $\mathscr{A}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств, то $\overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$. Отметим, что носители функций φ_α не обязательно компактны.

Следствие. *Если множество G открыто в M, а множество A замкнуто в M и, кроме того, $A \subset G$, то существует функция φ: $M \to \mathbb{R}$ класса C^∞, такая, что*

(a) $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$ *для всех* $p \in M$;

(b) $\varphi(p) = 1$, *если* $p \in A$;

(c) $\operatorname{supp}\varphi \subset G$.

Доказательство. На многообразии M существует разбиение единицы $\{\varphi, \psi\}$, подчиненное покрытию $\{G, M - A\}$, с носителями $\operatorname{supp}\varphi \subset G$ и $\operatorname{supp}\psi \subset M - A$. Эта функция φ удовлетворяет требованиям следствия.

Касательные векторы и дифференциалы

1.12. Вектор v с компонентами $v_1, \dots, v_d$ в точке p евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать как оператор на дифференцируемых функциях. Точнее, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки p, то вектор v ставит в соответствие этой функции вещественное число $v(f)$, являющееся значением ее производной в точке p по направлению вектора v, т. е.

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1}\bigg|_p + \dots + v_d \frac{\partial f}{\partial r_d}\bigg|_p. \tag{1}$$

Этот оператор взятия производной по направлению вектора v на дифференцируемых функциях обладает двумя важными свойствами:

(2)
$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g),$$
$$v(f \circ g) = f(p)\, v(g) + g(p)\, v(f)$$

для любых функций f и g, дифференцируемых в окрестности точки p и для любого вещественного числа λ. Первое свойство означает, что оператор v линейно действует на функциях, а второе — что он является *дифференцированием*. Это обосновывает наше определение касательного вектора на многообразии. Касательный вектор будет производной по направлению, т. е. линейным дифференцированием на функциях. Операция взятия производной зависит только от локальных свойств функции, свойств в сколь угодно малых окрестностях точки, в которой берется производная. Чтобы лучше объяснить эту зависимость производной от локальных свойств функций, мы введем понятие ростков функций.

1.13. Определения. Пусть $m \in M$. Говорят, что функции f и g, определенные на открытых множествах, содержащих m, имеют одинаковый *росток* в m, если они совпадают в некоторой окрестности точки m. Тогда в пространстве функций из класса C^∞, определенных на окрестностях точки m, можно ввести следующее отношение эквивалентности: две функции эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый росток. Классы эквивалентности называются *ростками*, и мы будем обозначать множество ростков в точке m символом $\tilde{F}_m$. Если f — функция класса C^∞ на некоторой окрестности точки m, то $\mathbf{f}$ будет обозначать ее росток. Операции сложения, скалярного умножения и умножения на функциях индуцируют на $\tilde{F}_m$ структуру алгебры над $\mathbb{R}$. Росток $\mathbf{f}$ имеет корректно определенное значение $\mathbf{f}(m)$ в точке m, а именно значение в m любого представителя этого ростка. Пусть $F_m \subset \tilde{F}_m$ — множество ростков, принимающих в m нулевое значение. Тогда F_m — это идеал алгебры $\tilde{F}_m$, и мы обозначим символом F_m^k его k-ю степень. Последняя является идеалом в $\tilde{F}_m$, состоящим из всех конечных линейных комбинаций произведений по k элементов из F_m. Получается убывающая последовательность идеалов $\tilde{F}_m \supset F_m \supset F_m^2 \supset F_m^3 \supset \ldots$.

1.14. Определение. *Касательным вектором v в точке $m \in M$* называется линейное дифференцирование алгебры $\tilde{F}_m$. То есть для любых ростков $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \tilde{F}_m$ и вещественного λ выполнены следующие два условия:

(a) $v(\mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}) = v(\mathbf{f}) + \lambda v(\mathbf{g})$,

(b) $v(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f}(m)\, v(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(m)\, v(\mathbf{f})$.