1.4. Векторные поля

Векторное поле X — это функция, определенная на подмножестве E многообразия M и относящая каждой точке $m \in E$ некоторый элемент $X(m) \in M_m$.

Пусть X — векторное поле и $f \in F(M, m)$, тогда Xf — функция, определенная на пересечении областей определения X и f равенством $Xf(n) = X(n)(f)$.

Векторное поле X принадлежит *классу* C^∞, если область его определения открыта и для каждого m из его области определения и произвольного $f \in F(M, m)$ выполнено соотношение $Xf \in F(M, m)$.

Часто векторное C^∞-поле X рассматривается как отображение C^∞-функций, заданное в виде $f \to Xf$, поскольку этим X полностью определено, если брать всевозможные f.

Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система, тогда D_{xi} — векторные C^∞-поля. Если X — векторное поле, заданное на области определения этой координатной системы, то можно написать $X = \sum f_i D_{x_i}$, где f_i — некоторые вещественные функции.

Задача 13. Доказать, что $X \in C^\infty$ тогда и только тогда, когда $f_i \in C^\infty$.

Если f является C^∞-отображением M в R^e, так что $f = (f_1, \ldots, f_e)$ с вещественными f_i, и X — векторное поле на M, то через Xf мы будем обозначать $(Xf_1, \ldots, Xf_e)$. Аналогично для касательной t определяется $tf \in R^e$. Очевидно, что если $X \in C^\infty$, то $Xf \in C^\infty$.

Пусть X, Y — векторные C^∞-поля. На пересечении их областей определения зададим векторное C^∞-поле $[X, Y]$, так называемую *скобку полей X и Y*, положив $[X, Y] = XY - YX$. Умножением векторных полей здесь служит композиция их действия на функции.

Задача 14. Пусть X и Y — векторные C^∞-поля. Доказать, что

(а) $[X, Y]$ — действительно векторное поле.

(б) XY не является векторным полем, если только один из сомножителей не равняется 0.

(в) Если f и g — вещественные C^∞-функции, то
$$[fX,\ gY]=fg[X,\ Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X.$$

Координатное выражение для скобки. Пусть X, Y — векторные C^∞-поля, $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система, $X=\sum f_i D_{x_i}$, $Y=\sum g_i D_{x_i}$ на общей части областей определения. Тогда
$$[X, Y]=\sum_{i,j}(f_i D_{x_i} g_j - g_i D_{x_i} f_j) D_{x_j}.$$

Операция скобки билинейна по отношению к вещественным коэффициентам. Кроме того, она кососимметрична, т. е. $[X,\ X]=0$, что равносильно равенству $[X, Y]=-[Y, X]$.

Тождество Якоби. Если X, Y, Z — векторные C^∞-поля, то
$$[[X,\ Y],\ Z]+[[Y,\ Z],\ X]+[[Z,\ X],\ Y]=0.$$

Иначе говоря, отображение $Y\to[X,\ Y]$, *производная Ли поля Y по X*, является дифференцированием алгебры векторных C^∞-полей, операцией умножения в которой является скобка: $[X,\ [Y,\ Z]]=[[X,\ Y],\ Z]+[Y,\ [X,\ Z]]$.

Векторные поля и отображения. Пусть $\varphi: M\to N$, $\varphi\in C^\infty$, X, Y — векторные поля на M и N соответственно; тогда X, Y являются *φ-связанными*, если для каждого m из области определения поля X выполнено равенство $d\varphi(X(m))=Y(\varphi(m))$.

Если $d\varphi$ в каждой точке взаимно однозначно, то отображение φ называется *регулярным*.

Задача 15. Если φ — регулярное отображение и Y — такое векторное C^∞-поле на N, что для каждой точки m из прообраза области определения φ имеем $Y(\varphi(m))\in d\varphi(M_m)$, то на M существует единственное векторное C^∞-поле, φ-связанное с Y [95, стр. 127].

Отметим, что в общем случае, если даны C^∞-отображение $\varphi: M\to N$ и векторное поле X на M, то $d\varphi X$ не всегда определено. А именно, если m, $n\in M$ таковы, что

$\varphi(m)=\varphi(n)$, но $d\varphi(X(m))\neq d\varphi(X(n))$, то $d\varphi X$ нельзя определить однозначно в $\varphi(m)$.

Задача 16. Привести пример, когда $d\varphi X$ не определено, причем $M=R$, $N=S^1$ и φ регулярно.

Задача 17. *Скобки и отображения.* Пусть $\varphi: M\to N$, $\varphi\in C^\infty$, X_1, X_2 — векторные C^∞-поля на M, Y_1, Y_2 — векторные C^∞-поля на N, причем X_i φ-связанно с Y_i $(i=1,2)$. Тогда $[X_1, X_2]$ φ-связанно с $[Y_1, Y_2]$ [95, стр. 128].

Интегральные кривые. Пусть X — векторное C^∞-поле; тогда γ называется *интегральной кривой поля X, начинающейся в m*, если $\gamma(0)=m$ и для каждого t из области определения γ имеет место равенство $\gamma_*(t)=X(\gamma(t))$. Существование интегральных кривых и их фактическая единственность непосредственно следуют из соответствующих теорем для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений: достаточно в каждой точке взять координатную систему и рассматривать все

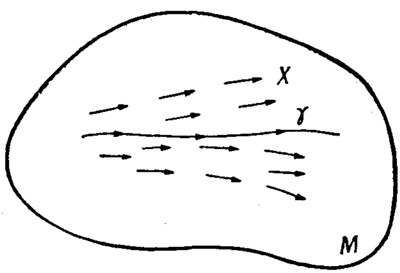

Рис. 9.

на открытом подмножестве R^d. Под *фактической единственностью* подразумевается следующее: если γ и τ — интегральные кривые, начинающиеся в m, то их сужения на общий интервал определения совпадают.

Задача 18. Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система в m, γ — интегральная кривая поля X, начинающаяся в m, $f_i=x_i\circ\gamma$, так что каждое f_i — это вещественная C^∞-функция, определенная на некотором интервале вещественной оси, содержащем 0. Показать, что уравнение $\gamma_*(t)=X(\gamma(t))$ эквивалентно системе уравнений для функций f_i и их производных, так что нахождение интегральных кривых действительно эквивалентно решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Локальная однопараметрическая группа. Пусть X — векторное C^∞-поле. Сопоставим X *локальную однопараметрическую группу преобразований* T, которая каждому $m \in M$ и произвольному вещественному числу t, достаточно близкому к 0, относит точку $T(m, t)=\gamma(t)$, где γ — интегральная кривая поля X, начинающаяся в m. В силу теорем о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, для каждого m найдется положительное число c и окрестность U точки m, такие, что T определено и принадлежит C^∞ на $U\times(-c, c)$. Поскольку второй аргумент функции $T(m,t)$ является параметром вдоль соответствующей кривой, то его значения удовлетворяют следующему требованию аддитивности: если $n \in U$, t, s, $s+t\in(-c, c)$, то $T(T(n, t), s)=T(n, s+t)$.

Обратно, если задано некоторое C^∞-отображение T произведения $U\times(-c, c)$ в M, удовлетворяющее условию аддитивности, то можно построить векторное поле с локальной однопараметрической группой T: в точке $m\in U$ это векторное поле принимает значение $X(m)= =(T\circ j_m)_*(0)$, где $j_m(t)=(m, t)$.

Задача 19. Пусть $X=u_1D_1+u_2D_2$. Найти явные уравнения для $T: R^2\times R\to R^2$. Сделайте то же самое для $Y=-u_2D_1+u_1D_2$.

Производные Ли. Отображение многообразия действует на функции, дифференциалы, векторные поля и другие геометрические объекты, определенные на многообразии: на функции — композицией с самым отображением, на дифференциалы — композицией со своим дифференциалом, а на векторные поля — самим дифференциалом. Следует отметить, что функции и дифференциалы *сносятся* с области значений на область определения отображения, тогда как векторные поля *выносятся* с области определения на область значений. Далее, если рассмотреть значения одного из этих геометрических объектов вдоль γ, интегральной кривой

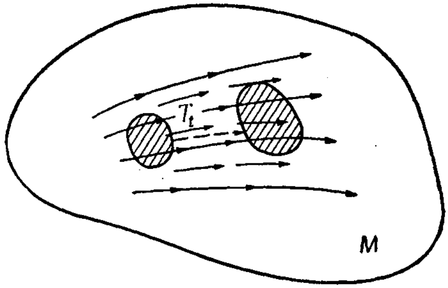

Рис. 10.

поля X, начинающейся в точке m, то, применяя преобразования $T_t = T \circ {}'j_t$, где ${}'j_t(n) = (n, t)$, получим некоторую кривую значений в точке m: это либо вещественная функция аргумента t, либо кривая в M_m^*, либо кривая в M_m. Поскольку в каждом случае такая кривая принадлежит некоторому векторному пространству, то ее можно дифференцировать. Производная в 0 называется *производной Ли* соответствующего *объекта по X в точке m.*

В случае функции f как раз дифференцируются значения f вдоль γ по параметру t, поэтому получается тангенциальная производная вдоль кривой, т. е. $X(m)f$.

В случае дифференциала функции df кривая в M_m^* задается отображением $t \to df(\gamma(t)) \circ (dT_t)_m$, где $(dT_t)_m$ обозначает сужение dT_t на M_m. Нетрудно показать, что производная Ли в этом случае есть $(d(Xf))_m$ [94, стр. 75].

В случае векторного поля Y мы должны его значение в $\gamma(t)$ снести в точку m, что делается с помощью dT_{-t}, так что соответствующая кривая в M_m — это отображение $t \to dT_{-t}(Y(\gamma(t)))$. Поскольку мы вернемся к этому случаю в главе о расслоениях, сформулируем наш результат в виде теоремы; он согласуется с терминологией, уже введенной при рассмотрении тождества Якоби.

Теорема 3. Производной Ли поля Y по X служит $[X, Y]$.

Доказательство. Мы должны показать, что для $f \in F(M, m)$

$$\frac{d}{dt}(0)\{dT_{-t}(Y(\gamma(t)))f\} = X(m)Yf - Y(m)Xf.$$

Замечая, что для вычисления $dT_{-t}(Y(\gamma(t)))f = Y(\gamma(t))(f \circ T_{-t})$ приходится рассматривать производ-

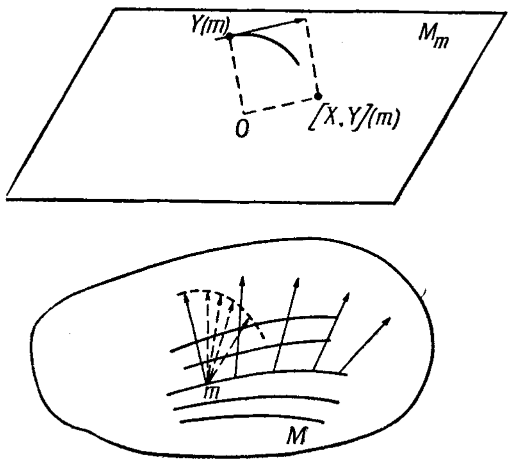

Рис. 11.

ные по Y, введем однопараметрическую группу S, ассоциированную с Y. Тогда, если определить $G: V \to R$, где V — окрестность точки $(0, 0)$ в R^2, равенством

$$G(t, r) = f(T(S(\gamma(t), r), -t)),$$

то из определения S сразу получается, что

$$Y(\gamma(t))(f \circ T_{-t}) = D_2G(t, 0)$$

и, следовательно, что

$$\frac{d}{dt}(0)dT_{-t}(Y(\gamma(t)))f = D_1D_2G(0, 0).$$

Если теперь $H(t, r, s) = f(T(S(\gamma(t), r), s))$, то из цепного правила вытекает, что $D_1D_2G(0,0) = D_1D_2H(0,0,0)$ —

$-D_2D_3H(0, 0, 0)$. Так как $H(t, r, 0) = f(T(S(\gamma(t), r), 0)) = f(S(\gamma(t), r))$, то $D_2H(t, 0, 0) = Yf(\gamma(t))$ и, таким образом, $D_1D_2H(0, 0, 0) = X(m)Yf$. Так как $H(0, r, s) = f(T(S(m, r), s))$, то $D_3H(0, r, 0) = Xf(S(m, r))$ и потому $D_2D_3H(0, 0, 0) = Y(m)Xf$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Геометрическая интерпретация скобки.* Пусть X, Y — векторные C^∞-поля, определенные в $m \in M$. Мы определим кривую, для которой $[X, Y](m)$ — предел ее касательных. Пусть g_1 — интегральная кривая X, начинающаяся в m. Остальные построения проходят при достаточно малых положительных c. Пусть g_2 — интегральная кривая поля Y, начинающаяся в $g_1(c)$; g_3 — интегральная кривая поля $-X$, начинающаяся в $g_2(c)$; g_4 — интегральная кривая поля $-Y$, начинающаяся в $g_3(c)$. Определим кривую g равенством $g(c^2) = g_4(c)$. Тогда имеем $[X, Y](m) = \lim_{t\to 0+} g_*(t)$, т. е. $[X, Y](m)f = \lim_{t\to 0+} g_*(t)f$ для каждого $f \in F(M, m)$.

Доказательство. Определим отображения h_1, h_2, h_3 некоторой окрестности точки $(0, 0) \in R^2$ в M, полагая $h_1(t, c) = g_2(t)$, $h_2(t, c) = g_3(t)$, $h_3(t, c) = g_4(t)$. Эти отображения принадлежат C^∞, поскольку они могут быть

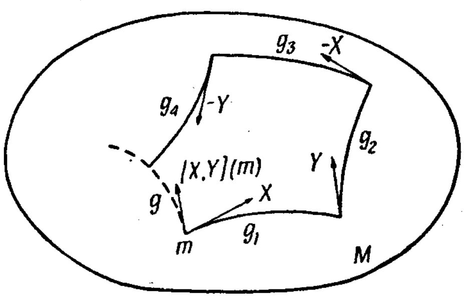

Рис. 12.

представлены как композиции однопараметрических групп полей X и Y; они явно выражают зависимость g_2, g_3, g_4 от c. Положим также $h(t) = h_3(t, t)$, так что $g(t^2) = h(t)$.

Сначала покажем, что $h_*(0)=0$, а тогда, согласно нижеследующей задаче 20, останется проверить, что

$$2[X, Y]f(m) = (f \circ h)''(0).$$

Следующие результаты вытекают непосредственно из определений:

(а) $D_2(f \circ h_1)(0, t) = Xf(h_1(0, t))$,
(б) $D_1(f \circ h_1) = Yf \circ h_1$,
(в) $D_1(f \circ h_2) = -Xf \circ h_2$,
(г) $D_1(f \circ h_3) = -Yf \circ h_3$,
(д) $h_3(0, t) = h_2(t, t)$,
(е) $h_2(0, t) = h_1(t, t)$.

Далее,

$(f \circ h)'(0) = D_1(f \circ h_3)(0, 0) + D_2(f \circ h_3)(0, 0)$ [цепное правило]

$= -Yf(m) + D_1(f \circ h_2)(0, 0) + D_2(f \circ h_2)(0, 0)$ [(г), (д)]

$= -Yf(m) - Xf(m) + D_1(f \circ h_1)(0, 0) + D_2(f \circ h_1)(0, 0)$ [(в), (е)]

$= 0$ [(а), (б)],

$(f \circ h)''(0) = D_1^2(f \circ h_3)(O) + 2D_2D_1(f \circ h_3)(O) + D_2^2(f \circ h_3)(O)$ [$(O) = (0, 0)$]

$= Y^2f(m) - 2D_1(Yf \circ h_2)(O) - 2D_2(Yf \circ h_2)(O) + D_1^2(f \circ h_2)(O) + 2D_2D_1(f \circ h_2)(O) + D_2^2(f \circ h_2)(O) =$

$= Y^2f(m) + 2XYf(m) - 2D_1(Yf \circ h_1)(O) - 2D_2(Yf \circ h_1)(O) + X^2f(m) - 2D_1(Xf \circ h_1)(O) - 2D_2(Xf \circ h_1)(O) + D_1^2(f \circ h_1)(O) + 2D_2D_1(f \circ h_1)(O) + D_2^2(f \circ h_1)(O) =$

$= Y^2f(m) + 2XYf(m) - 2Y^2f(m) - 2XYf(m) + X^2f(m) - 2YXf(m) - 2X^2f(m) + Y^2f(m) + 2XYf(m) + X^2f(m) =$

$= 2XYf(m) - 2YXf(m)$. Ч. Т. Д.

Задача 20. Пусть h есть C^∞-кривая и $h_*(0)=0$; для малых положительных t определим g равенством $g(t^2)=h(t)$; пусть $m=h(0)$. Показать, что

(1) отображение $f \to (f \circ h)''(0)$ пространства $F(M, m)$ служит касательной в m;

(2) эта касательная совпадает с $2 \lim\limits_{t \to 0+} g_*(t)$, причем предел здесь понимается в прежнем смысле.

Назовем ее касательной второго порядка к h в точке, где аннулируется касательная первого порядка; требуется обобщить (1) так, чтобы определить касательную n-го порядка к h в точке, где аннулируются касательные первого, второго, ..., $(n-1)$-го порядка, и доказать утверждение, аналогичное (2).

Задача 21. Пусть X—векторное C^∞-поле и $X(m)=0$. Показать, что интегральная кривая поля X, начинающаяся в m, является постоянной: $\gamma(t)=m$ для каждого t. Поэтому если γ есть C^∞-кривая и $\gamma_*(0)=0$, то γ_* можно продолжить до некоторого векторного C^∞-поля, лишь если γ — постоянная кривая.

Задача 22. Для поля X из задачи 19 и $f=u_2$ показать прямым вычислением, что производной Ли дифференциала df по X служит $d(Xf)=df$.

Задача 23. С помощью теоремы 3, а также теоремы 4 показать, что $[X, Y]=0$ для полей X и Y из задачи 19.

Это следствие того, что при $[X, Y]=0$ в окрестности точки m ломаная кривая теоремы 4 действительно замкнута при достаточно малых t, т. е. $g(t)=m$ для всех t вблизи 0.

Теорема 5. Пусть X_i, $i=1, \ldots, e$,—линейно независимые векторные C^∞-поля, определенные в некоторой окрестности точки m d-мерного многообразия M, причем $[X_i, X_j]=0$ в этой окрестности при любых i, j. Тогда существует такая координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, что X_i совпадает с D_{x_i} в координатной окрестности ($i \leqslant e$) и $x_i(m)=0$, $i=1, \ldots, d$.

Доказательство. Возьмем такую координатную систему $(y_1, \ldots, y_d)$, чтобы $y_i(m)=0$ при всех i и

$X_1(m), \ldots, X_e(m), \quad D_{y_{e+1}}(m), \ldots, D_{y_d}(m)$ образовали базис пространства M_m. Определим $\psi: U \to M$, где U — окрестность точки $0 \in R^d$, следующим образом:

$$y_i(\psi(0, 0, \ldots, 0, a_{e+1}, \ldots, a_d)) = \begin{cases} a_i, & i > e, \\ 0, & i \leqslant e. \end{cases}$$

Тогда $t \to \psi(0, 0, \ldots, 0, t, a_{i+1}, \ldots, a_d)$ — интегральная кривая поля X_i, начинающаяся в $\psi(0, 0, \ldots, 0, a_{i+1}, \ldots$ $\ldots, a_d)$, $i \leqslant e$.

Отображение ψ можно также представить как композицию однопараметрических групп полей $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_e$ и обратного к y-координатному отображению; отсюда или же прямо из теории дифференциальных уравнений получаем, что $\psi \in C^\infty$.

Из определения ясно, что $d\psi(D_i(0)) = X_i(m)$, $i \leqslant e$, и $d\psi(D_i(0)) = D_{y_i}(m)$, $i > e$. По теореме об обратной функции, ψ^{-1} определено и принадлежит C^∞ в некоторой окрестности m и таким образом определяет координатную систему $(x_1, \ldots, x_d)$, при которой $x_i(m) = 0$ для всех i.

Поскольку интегральные кривые поля D_1 всегда соответствуют интегральным кривым поля X_1 относительно ψ, то ясно, что в координатной окрестности $D_{x_1} = X_1$. Мы завершим доказательство, показав индукцией по i, что $X_i x_j = \delta_{ij}$. Так как интегральные кривые поля D_i, начинающиеся в точках $(0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_d)$, соответствуют интегральным кривым поля X_i при отображении ψ, то $X_i x_j = \delta_{ij}$ в точках $\psi(0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_d)$. Но $X_k X_i = X_i X_k$, так что при $k < i$ имеем, по предположению индукции, $X_k(X_i x_j) = X_i(X_k x_j) = 0$. Таким образом, $X_i x_j$ являются константами вдоль интегральных кривых поля X_k, $k < i$. Но каждая точка координатной окрестности достижима посредством цепей таких интегральных кривых, начинающихся в точках $\psi(0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_d)$, так что $X_i x_j = \delta_{ij}$ везде. Ч. Т. Д.

Задача 24. Найти упомянутое в доказательстве представление ψ в виде композиции однопараметрических групп полей $X_1, X_2, \ldots, X_e$ и обратного к y-координатному отображению.