1.5. Подмногообразия

Пусть M есть C^∞-многообразие. Многообразие N называется *подмногообразием* в M, если существует взаимно однозначное C^∞-отображение $i: N \to M$, такое, что di взаимно однозначно в каждой точке. Мы называем i *вложением* и говорим, что N *вложено* в M посредством i.

Часто начинают с подмножества в M, на котором задают C^∞-структуру так, чтобы оно стало подмногообразием относительно отображения включения. Например, таким путем открытое подмножество в M превращается в подмногообразие в M; d-сфера как подмногообразие в R^{d+1} и подпространство R^d, вложенное как $R^d \times \{0\}$ в R^{d+e}, — примеры, где размерность подмногообразия меньше размерности объемлющего многообразия.

Задача 25. Показать вычислением, что дифференциал отображения, обратного к стереографической проекции $R^d \to R^{d+1}$, везде взаимно однозначен, и вывести отсюда, что S^d — подмногообразие в R^{d+1}.

Обмотка тора. Этот пример показывает, что отображение $i: N \to M$ хотя и непрерывно, но не обязательно является гомеоморфизмом, т. е. топология $i(N)$ как топология подмножества в M не обязана совпадать с топологией многообразия в N. Пусть M — двумерный тор и $N = R$, вложенное в M в виде плотной однопараметрической подгруппы M [т. е. для $x \in R$, $i(x) = (\exp icx, \exp idx) \in S^1 \times S^1$, где c/d — иррациональное число]. Тогда N — подмногообразие в M, но $i(N)$ даже не замкнуто в M и потому не локально компактно.

Изменяя C^∞-структуру на открытом подмногообразии, можно получить примеры (топологических) подпространств, не являющихся подмногообразиями, так как отображение включения не обязательно принадлежит C^∞, а если и принадлежит ему, то может быть нерегулярным в каких-нибудь точках.

Задача 26. Пусть $\psi: N \to M$ принадлежит C^∞, причем $\dim M < \dim N$, и пусть S — множество нулевой меры, определенное в задаче 11. Доказать, что если

$m \notin S$, то $P = \psi^{-1}(m)$ с топологией, индуцированной из N, обладает единственной C^∞-структурой, с которой оно является подмногообразием в N относительно отображения включения [73].

Задача 27. Для $\psi = u_2^3 + u_1^3 - 3u_1u_2 : R^2 \to R$ определить S и выяснить, почему при $m \in S$ множество $\psi^{-1}(m)$ не является подмногообразием в R^2.

В случае когда ψ — вещественная функция на R^3, подмногообразия, определяемые по способу задачи 26, являются классическими поверхностями в 3-пространстве.

Задача 28. Пусть $f : P \to M$ принадлежит C^∞, $i : N \to M$ — подмногообразие, причем $f(P) \subset i(N)$. Пусть $g = i^{-1} \circ f : P \to N$. Тогда

(а) если g непрерывно, то $g \in C^\infty$;

(б) найти пример, когда g не является непрерывным.

Сужение функций. Если i — отображение N в M, где N — подмногообразие в M, и $f \in F(M, m)$, $m \in i(N)$, то $f \circ i \in F(N, i^{-1}(m))$ называется *сужением* f *на* N. Обратно, если $g \in F(N, n)$, то существует окрестность U точки $n \in N$ и $f \in F(M, i(n))$, такие, что $f \circ i|_U = g|_U$. Однако в целом это не имеет места. Например, в случае обмотки тора тождественная функция $u : R \to R$ не является сужением никакой непрерывной вещественной функции на торе M.

Сужение векторных полей. Пусть i — отображение N в M, где N — подмногообразие в M, X — векторное C^∞-поле на M и $X(i(n)) \in di(N_n)$ для всех $n \in N$; тогда, в силу задачи 15, на N существует такое векторное C^∞-поле Y, что $di(Y(n)) = X(i(n))$. Y называется *сужением* X *на* N. Отметим, что, в силу задачи 17, скобка сужений полей является сужением их скобки.

Векторные поля на N допускают локальное продолжение, т. е. так же как и функции локально представимы в виде сужений. В частности, если γ есть C^∞-кривая в M с необращающейся в нуль касательной γ_*, то локально γ_* можно продолжить до векторного поля в M (см. задачу 21).