1.6. Распределения и интегрируемость

Функция θ, определенная на многообразии M и сопоставляющая каждому $m \in M$ некоторое p-мерное линейное подпространство $\theta(m)$ в M_m, называется *p-мерным распределением* на многообразии $M (p \leqslant \dim M)$. Говорят, что p-мерное распределение θ на M принадлежит *классу C^∞* в точке $m \in M$, если существуют векторные C^∞-поля $X_1, \ldots, X_p$, определенные в окрестности U точки m, такие, что при любом $n \in U$ векторы $X_1(n), \ldots, X_p(n)$ порождают $\theta(n)$. *Интегральное многообразие N* распределения θ — это такое подмногообразие в M, что $di(N_n) = \theta(i(n))$ для любого $n \in N$. Говорят, что векторное поле X *принадлежит* распределению θ, и пишут $X \in \theta$, если $X(m) \in \theta(m)$ при любом m из области определения поля X. Распределение θ *инволютивно*, если для всех векторных C^∞-полей X, Y, принадлежащих θ, имеем $[X, Y] \in \theta$. Распределение θ *интегрируемо*, если для каждого $m \in M$ существует интегральное многообразие распределения θ, содержащее m. Иногда вместо $\theta(m)$ пишут θ_m.

Инволютивность интегрируемого C^∞-распределения легко установить с помощью задачи 17 или теоремы 4, помогающей также понять, почему справедливо обратное утверждение. Обход однопараметрического семейства четырехугольников со сторонами, касательными к некоторому распределению, может привести к кривой, касательная к которой не принадлежит ему, что невозможно в случае инволютивного распределения. Таким образом, если распределение инволютивно, то интегральные многообразия можно строить, двигаясь вдоль различных интегральных кривых векторных полей, принадлежащих данному распределению.

Всякое одномерное C^∞-распределение и инволютивно, и интегрируемо, в силу существования интегральных кривых.

Задача 29. Пусть P, Q, R — это C^∞-функции на открытом подмножестве U в R^3, нигде не обращающиеся в 0 одновременно. Пусть $\theta(m)$ — линейное подпространство в R^3_m, ортогональное к $(P(m), Q(m), R(m))$. Показать, что θ инволютивно в том и только в том случае, если

$$P(D_3Q - D_2R) + Q(D_1R - D_3P) + R(D_2P - D_1Q) = 0.$$

Интегральным многообразием является решение уравнения

$$P du_1 + Q du_2 + R du_3 = 0.$$

Следующую теорему, вышеупомянутое обратное утверждение, легче всего доказать, рассмотрев сначала ее локальный вариант. В полном объеме она получается последующей склейкой. Двойственное утверждение в терминах дифференциальных форм составляет классическую теорему Фробениуса.

Теорема 6. Инволютивное C^∞-распределение интегрируемо. Кроме того, через каждую точку $m \in M$ проходит единственное максимальное связное интегральное многообразие распределения, причем всякое связное интегральное многообразие, содержащее m, является открытым подмногообразием максимального многообразия [95, стр. 140].

Локальная теорема дает больше информации о том, как расположены по отношению друг к другу интегральные многообразия.

Теорема 7. Если θ — инволютивное C^∞-распределение на M, $m \in M$, то в окрестности m существует координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, такая, что $x_i(m) = 0$, и для каждого m' из координатной окрестности соответствующий *слой* $\{p \in M \mid x_i(p) = x_i(m')$ для любого $i > e\}$ $(e = \dim \theta)$ является интегральным многообразием распределения θ, если снабдить его естественной C^∞-структурой, индуцированной координатным отображением.

Набросок доказательства. Достаточно построить координатную систему, такую, что для каждого X, принадлежащего распределению θ, $Xx_i = 0$ при $i > e$.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_e$ — векторные C^∞-поля, порождающие θ в окрестности m. Возьмем такие координаты y_i, что $Y_e = D_{y_1}$. (Это возможно по теореме 5, примененной к одному векторному полю.) Пусть $Y'_i = Y_i - (Y_i y_1) Y_e$,

$i<e$, $Y'_e=Y_e$. Тогда, поскольку $Y'_i y_1=0$ при $i<e$, $[Y'_i, Y'_j]y_1=0$ для всех i, j, так что $[Y'_i, Y'_j]$ можно представить как линейную комбинацию (коэффициенты которой — вещественные C^∞-функции) полей $Y'_1, \ldots$ $\ldots, Y'_{e-1}$. В частности, Y'_i, $i<e$, порождают инволютивное $(e-1)$-мерное распределение. Повторяя этот процесс еще $e-2$ раз, получим векторные поля $X_1, \ldots$ $\ldots, X_e$, порождающие θ, причем скобки первых i полей, $i \leqslant e$, являются линейными комбинациями первых $i-1$ полей ($X_e=Y_e$, $X_{e-1}=Y'_{e-1}$ и т. д.).

С помощью этих X_i повторяем последовательно доказательство теоремы 5, кроме последнего пункта, где нужно доказать более слабое утверждение ($X_i x_j=0$ только для $j>e$), конечно, при более слабых условиях ($X_h X_i = X_i X_h$ + линейная комбинация полей X_h, $h<i$).

Задача 30. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_h$ — дополнительные C^∞-распределения на M, т. е. при каждом $m \in M$ пространство M_m является прямой суммой подпространств $\theta_i(m)$. Доказать, что если все θ_i интегрируемы, то они одновременно интегрируемы в следующем смысле: в каждой точке $m \in M$ существует координатная система $(x_1, \ldots, x_d)$, такая, что $D_{x_1}, \ldots, D_{x_{d_1}}$ порождают $\theta_1, \ldots, D_{x_{d_{h-1}}}, \ldots, D_{x_d}$ порождают θ_h, где $d_i - d_{i-1} = \dim \theta_i$ ($d_0=0$, $d_h=d$).

Задача 31. Доказать следующее дополнение к задаче 28.

(в) Если N — интегральное многообразие некоторого распределения на M, то g непрерывно.