ГЛАВА 2

Группы Ли

В настоящей главе приводятся основные определения и теоремы теории групп Ли и алгебр Ли, большей частью без доказательств. В частности, рассматривается соответствие между подалгебрами и подгруппами, а также гомоморфизмы, экспоненциальное отображение и присоединенное представление [35, 47, 60, 80, 88, 95].

2.1. Группы Ли

Группа Ли G — это множество, которое одновременно является и многообразием и группой с групповыми операциями класса C^∞, т. е. отображения

$$G \times G \to G, \quad \text{заданное выражением} \quad (g, h) \to gh,$$
$$G \to G, \quad \text{заданное выражением} \quad g \to g^{-1},$$

принадлежат C^∞.

Примеры. $Gl(d, R)$ является группой Ли относительно стандартных операций над невырожденными матрицами. Групповые операции задаются рациональными функциями координатных переменных, так что они не только принадлежат C^∞, но даже аналитичны. Так как $Gl(d, R)$ можно рассматривать как группу неособенных линейных преобразований пространства R^d и каждое вещественное d-мерное пространство V изоморфно R^d, то группу $Gl(V)$ неособенных линейных преобразований V можно рассматривать как группу Ли, изоморфную $Gl(d, R)$. Пространство R^d является группой Ли относительно сложения.

Окружность $T^1 = S^1$ является группой Ли относительно обычного умножения. Тогда T^e и $R^d \times T^e$ — группы Ли относительно покомпонентного умножения. Группа

$R^d \times T^e$ — самая общая абелева группа Ли (см. задачу 13).

Вообще произведение групп Ли есть группа Ли относительно покомпонентного умножения; накрывающее пространство связной группы Ли тоже допускает структуру группы Ли, при которой накрывающее отображение принадлежит C^∞ и является гомоморфизмом. В частности, каждая связная группа Ли локально изоморфна односвязной группе Ли.

Подгруппа Ли в группе Ли — это такая подгруппа, которая также является группой Ли и подмногообразием.

2.2. Алгебры Ли

Алгеброй Ли называется векторное пространство L, на котором задано билинейное отображение $L \times L \to L$, называемое *скобкой* и обозначаемое $[\ ,\ ]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $[x, x] = 0$ для любого $x \in L$;

(2) тождество Якоби: для любых $x, y, z \in L$

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0.$$

Из (1) следует, что $[x, y] = -[y, x]$, а это соотношение в свою очередь дает (1), если только L не есть линейное пространство над полем характеристики 2.

Примеры. (1) Если M есть C^∞-многообразие, то глобальные векторные C^∞-поля образуют бесконечномерную алгебру Ли.

(2) Множество $\mathfrak{gl}(d, R)$ всех линейных преобразований пространства R^d является алгеброй Ли относительно скобочной операции: $[A, B] = AB - BA$. Аналогичное обозначение $\mathfrak{gl}(V)$ используется для алгебры Ли линейных преобразований векторного пространства V.

(3) На всяком векторном пространстве V можно определить скобочную операцию, полагая все скобки равными нулю. Так получается *абелева алгебра Ли* на V.

(4) Если K и L — алгебры Ли, то $K \oplus L$ является алгеброй Ли со скобкой

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y']).$$