$R^d \times T^e$ — самая общая абелева группа Ли (см. задачу 13).

Вообще произведение групп Ли есть группа Ли относительно покомпонентного умножения; накрывающее пространство связной группы Ли тоже допускает структуру группы Ли, при которой накрывающее отображение принадлежит C^∞ и является гомоморфизмом. В частности, каждая связная группа Ли локально изоморфна односвязной группе Ли.

Подгруппа Ли в группе Ли — это такая подгруппа, которая также является группой Ли и подмногообразием.

2.2. Алгебры Ли

Алгеброй Ли называется векторное пространство L, на котором задано билинейное отображение $L \times L \to L$, называемое *скобкой* и обозначаемое [,], удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $[x, x]=0$ для любого $x \in L$;

(2) тождество Якоби: для любых $x, y, z \in L$

$$[x, [y, z]]+[z, [x, y]]+[y, [z, x]]=0.$$

Из (1) следует, что $[x, y]= -[y, x]$, а это соотношение в свою очередь дает (1), если только L не есть линейное пространство над полем характеристики 2.

Примеры. (1) Если M есть C^∞-многообразие, то глобальные векторные C^∞-поля образуют бесконечномерную алгебру Ли.

(2) Множество $\mathfrak{gl}(d, R)$ всех линейных преобразований пространства R^d является алгеброй Ли относительно скобочной операции: $[A, B]=AB-BA$. Аналогичное обозначение $\mathfrak{gl}(V)$ используется для алгебры Ли линейных преобразований векторного пространства V.

(3) На всяком векторном пространстве V можно определить скобочную операцию, полагая все скобки равными нулю. Так получается *абелева алгебра Ли* на V.

(4) Если K и L — алгебры Ли, то $K \oplus L$ является алгеброй Ли со скобкой

$$[(x, y), (x', y')]=([x, x'], [y, y']).$$

Подалгебра алгебры Ли L — это подпространство, замкнутое относительно скобочной операции в L. *Идеалом* алгебры Ли L называется такая подалгебра K, что для любых $x \in L$ и $y \in K$ имеем $[x, y] \in K$. *Гомоморфизм* одной алгебры Ли в другую — это линейное преобразование, сохраняющее скобки. *Изоморфизм* алгебр Ли — это взаимно однозначный гомоморфизм «на».

Ядро гомоморфизма является идеалом. Образ гомоморфизма является подалгеброй.

Пусть G — группа Ли. *Левоинвариантным векторным полем на* G называется векторное поле, инвариантное относительно дифференциалов левых сдвигов; иначе говоря, если $L_g: G \to G$ определено формулой $L_g(h) = gh$, то X — левоинвариантное векторное поле при условии, что $dL_g X(h) = X(gh)$ для любых $g, h \in G$.

Левоинвариантное векторное поле глобально определено и принадлежит C^∞. Сумма двух левоинвариантных векторных полей, произведение левоинвариантного векторного поля на вещественное число и скобка двух левоинвариантных векторных полей являются левоинвариантными векторными полями. Левоинвариантное векторное поле однозначно определено своим значением в единичном элементе группы (см. [95], стр. 151).

Алгебра Ли группы G, обозначаемая через $\mathfrak{g}$, — это алгебра Ли всех левоинвариантных векторных полей.

В соответствии с вышесказанным векторное пространство алгебры Ли группы G можно отождествить с касательным пространством в единичном элементе: $X \in \mathfrak{g} \to X(e) \in G_e$.

Алгебру Ли группы $R^d \times T^e$ можно отождествить с абелевой алгеброй Ли на R^{d+e}.

Локально изоморфные группы Ли имеют изоморфные алгебры Ли. Например, алгеброй Ли как группы R^2, так и группы T^2 служит R^2, и аналогично алгебра Ли произвольной группы Ли совпадает с алгеброй Ли накрывающей группы Ли. Кроме того, алгебра Ли произведения групп Ли является прямой суммой их алгебр Ли.

Общая линейная группа. Если рассматривать $Gl(d, R)$ как группу неособенных линейных преобразований R^d, то изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $Gl(d, R)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(d, R)$ устанавливается следующим образом.

Пусть $<\,,\,>$ — обычное скалярное произведение на R^d. Для произвольной пары v, $w \in R^d$ определим вещественную C^∞-функцию $f_{v,w}$ на $Gl(d, R)$, полагая

$$f_{v,w}(T) = <Tv, w>, \qquad T \in Gl(d, R).$$

Тогда отображение $J: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(d, R)$, определенное равенством $<J(X)v, w> = X(e)f_{v,w}$ при любых v, w, является изоморфизмом.

Этот же изоморфизм может быть установлен другим способом. Каждый элемент $v \in R^d$ можно рассматривать как C^∞-отображение $Gl(d, R) \to R^d$, полагая $v(T) = T(v)$. Поэтому для каждого $X \in \mathfrak{g}$ получаем линейное преобразование $J(X)$ пространства R^d, если определить $J(X)v = X(e)v$. Тогда J — изоморфизм алгебр Ли $J: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(d, R)$. С этого момента мы будем отождествлять $J(X)$ с X и вместо $X(e)v$ будем писать Xv.

С другой стороны, если рассматривать $Gl(d, R)$ как группу матриц, а $\mathfrak{gl}(d, R)$ — как пространство всех $d \times d$-матриц, то $\mathfrak{g}$ следующим образом можно отождествить с $\mathfrak{gl}(d, R)$: если $\{x_{ij}\}$ — координатные функции на $Gl(d, R)$, т. е. $x_{ij}(g)$ есть ij-й элемент матрицы g, то $X \in \mathfrak{g}$ соответствует $X_{ij} = X(e)(x_{ij})$.

Задача 1. Показать, что

(а) $x_{ij} \circ L_g = \sum\limits_p x_{ip}(g) x_{pj}$.

(б) $dL_g\left(D_{x_{hl}}(I)\right) x_{jk} = x_{jh}(g)\delta_{lk}$.

(в) Если E_{ij} — матрица с 1 на ij-м и 0 на остальных местах, то левоинвариантным векторным полем X^{ij}, соответствующим E_{ij}, служит

$$X^{ij} = \sum_k x_{ki} D_{x_{kj}}.$$

(г) Используя эту формулу для X^{ij}, проверить непосредственно, что скобки сохраняются при отождествлении $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{gl}(d, R)$ [95].