2.3. Соответствие групп Ли и алгебр Ли

Теорема 1. Пусть G — группа Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между связными подгруппами Ли группы G и подалгебрами алгебры Ли группы G.

Набросок доказательства. Это соответствие устанавливается следующим образом. Если H — подгруппа Ли, то левоинвариантные векторные поля на H можно продолжить единственным образом до левоинвариантных векторных полей на G. Совокупность продолжений образует подалгебру алгебры Ли группы G, изоморфную алгебре Ли подгруппы H.

Существование подгруппы, соответствующей подалгебре, устанавливается рассмотрением максимальных интегральных многообразий инволютивного распределения, полученного из этой подалгебры. То из них, которое содержит единичный элемент группы G, как легко видеть, является абстрактной подгруппой в G. То, что это подгруппа Ли, сразу же следует из задач 28 и 31 гл. 1 (см. [95], стр. 159—160).

Во всякой алгебре Ли одномерное подпространство, порожденное ненулевым элементом, является подалгеброй. Таким образом, имеем

Следствие. Для каждого элемента X алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G существует одномерная подгруппа с алгеброй Ли, порожденной X; иначе говоря, существует кривая $\gamma : R \to G$, такая, что

(1) $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$,

(2) $X(\gamma(s))=\gamma_*(s)$.

$\gamma(R)$ называется *однопараметрической подгруппой, соответствующей* X. Это интегральная кривая поля X, проходящая через e.

Ортогональная группа. Группа $O(d)$ всех ортогональных преобразований пространства R^d является подгруппой Ли группы $Gl(d, R)$. При изоморфизме J из § 2.2 алгебра Ли группы $O(d)$ отождествляется с подалгеброй

$\mathfrak{o}(d)$ алгебры $\mathfrak{gl}(d, R)$, состоящей из всех кососимметрических преобразований.

То, что $O(d)$ — группа Ли, вытекает из теоремы 1, примененной к связной компоненте единичного элемента группы $O(d)$, т. е. к группе вращений R_d или $SO(d)$ как подгруппы связной компоненты единичного элемента группы $Gl(d, R)$.

Лемма 1. Пусть отображение $J: G \to G$ задано равенством $J(g) = g^{-1}$. Тогда если $t \in G_g$, то

$$dJ(t) = -dR_{g^{-1}} \circ dL_{g^{-1}}(t).$$

(R_g — это умножение справа на g.)

Доказательство. Пусть отображение $D: G \to G \times G$ задано равенством $D(g) = (g, g)$, а отображение $\beta: G \times G \to G$ — равенством $\beta(g, h) = gh$. Тогда $\beta \circ (1 \times J) \circ D = \text{const}$, так что $d\beta \circ d(1 \times J) \circ dD = 0$. Пусть $t \in G_g$, тогда

$$\begin{aligned}0 &= d\beta \circ d(1 \times J) \circ dD(t) = \\ &= d\beta \circ (d1(t) + dJ(t)) = \\ &= d\beta(t + dJ(t)) = \\ &= dR_{g^{-1}}(t) + dL_g(dJ(t)) \quad \text{(теорема 1.2).}\end{aligned}$$

Следствие. Если $X \in \mathfrak{g}$, то dJX правоинвариантно.

Существует параллельное определение алгебры Ли группы Ли в терминах правоинвариантных векторных полей, причем dJ связывает его с нашим определением.

2.4. Гомоморфизмы

Гомоморфизм одной группы Ли в другую — это отображение, которое служит одновременно и гомоморфизмом подлежащих групп и C^∞-отображением подлежащих многообразий. Мы предполагаем в остальной части этого параграфа, что наши группы связны.

Если $j: G \to H$ — гомоморфизм и t — касательная в единичном элементе G, то легко проверить, что левоин-