$\mathfrak{o}(d)$ алгебры $\mathfrak{gl}(d, R)$, состоящей из всех кососимметрических преобразований.

То, что $O(d)$ — группа Ли, вытекает из теоремы 1, примененной к связной компоненте единичного элемента группы $O(d)$, т. е. к группе вращений R_d или $SO(d)$ как подгруппы связной компоненты единичного элемента группы $Gl(d, R)$.

Лемма 1. Пусть отображение $J: G \to G$ задано равенством $J(g) = g^{-1}$. Тогда если $t \in G_g$, то

$$dJ(t) = -dR_{g^{-1}} \circ dL_{g^{-1}}(t).$$

(R_g — это умножение справа на g.)

Доказательство. Пусть отображение $D: G \to G \times G$ задано равенством $D(g) = (g, g)$, а отображение $\beta: G \times G \to G$ — равенством $\beta(g, h) = gh$. Тогда $\beta \circ (1 \times J) \circ D = \text{const}$, так что $d\beta \circ d(1 \times J) \circ dD = 0$. Пусть $t \in G_g$, тогда

$$\begin{aligned} 0 &= d\beta \circ d(1 \times J) \circ dD(t) = \\ &= d\beta \circ (d1(t) + dJ(t)) = \\ &= d\beta(t + dJ(t)) = \\ &= dR_{g^{-1}}(t) + dL_g(dJ(t)) \quad \text{(теорема 1.2).} \end{aligned}$$

Следствие. Если $X \in \mathfrak{g}$, то dJX правоинвариантно.

Существует параллельное определение алгебры Ли группы Ли в терминах правоинвариантных векторных полей, причем dJ связывает его с нашим определением.

2.4. Гомоморфизмы

Гомоморфизм одной группы Ли в другую — это отображение, которое служит одновременно и гомоморфизмом подлежащих групп и C^∞-отображением подлежащих многообразий. Мы предполагаем в остальной части этого параграфа, что наши группы связны.

Если $j: G \to H$ — гомоморфизм и t — касательная в единичном элементе G, то легко проверить, что левоинвариантные поля, отвечающие t и $dj(t)$ соответственно, j-связанны. Так j порождает гомоморфизм алгебры Ли $dj : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

Обратное утверждение неверно, если только не заменить понятие гомоморфизма понятием «локальный гомоморфизм». В этом случае указанное соответствие взаимно однозначно [95, стр. 165]. Однако если G односвязно, то локальный гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма, и мы получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть G и H — группы Ли, причем G односвязна. Тогда $j \longleftrightarrow dj$ является взаимно однозначным соответствием между гомоморфизмами G в H и гомоморфизмами $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{h}$.

Ядром гомоморфизма является замкнутая нормальная подгруппа, а ядром соответствующего гомоморфизма алгебр Ли — идеал, причем легко видеть, что этот идеал принадлежит подгруппе. Далее, если H — замкнутая нормальная подгруппа в G, то множество левых классов смежности G/H можно снабдить естественной структурой многообразия так, что проекция $G \to G/H$ является гомоморфизмом групп Ли.

Более общим результатом является

Теорема 3. Если H — подгруппа Ли группы G, то для нормальности H необходимо и достаточно, чтобы ее алгебра Ли $\mathfrak{h}$ была идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Если, кроме того, H замкнута, то алгебра Ли группы G/H естественно изоморфна факторалгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ [95].

Если G односвязна и $\mathfrak{h}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, то, по *теореме Адо*, существует группа Ли, имеющая алгебру Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ [19]. Тогда, по теореме 2, существует гомоморфизм группы G, соответствующий проекции $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, откуда вытекает, что нормальная подгруппа H, принадлежащая $\mathfrak{h}$, замкнута. Таким образом, если подгруппа Ли односвязной группы нормальна, то она замкнута.

Известно, что замкнутая подгруппа группы Ли сама является группой Ли (*критерий Картана*, [95, стр. 198]).