2.5. Экспоненциальное отображение

Пусть G — группа Ли, $X \in \mathfrak{g}$. Пусть γ_X — интегральная кривая поля X, начинающаяся в единичном элементе. Тогда *экспоненциальным отображением* $\mathfrak{g} \to G$ называется отображение, переводящее X в точку $\gamma_X(1)$;

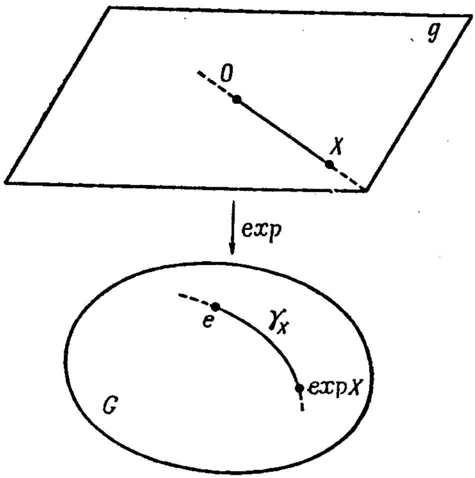

Рис. 13.

мы будем писать $\exp X = \gamma_X(1)$. Очевидно, отображение $t \to \exp tX$ совпадает с γ_X.

Коммутативность с гомоморфизмами. Если $j: G \to H$ — гомоморфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{dj} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{j} & H \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство следует сразу же из того факта, что $\gamma_{dj(X)} = j \circ \gamma_X$ при любом $X \in \mathfrak{g}$.

Отсюда и из следующей теоремы получаем, что экспоненциальное отображение устанавливает соответствие между подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и подгруппами в G.

Теорема 4. Отображение exp всюду принадлежит C^∞, а в окрестности 0 в $\mathfrak{g}$ является диффеоморфизмом.

Доказательство. Временно предположив, что $\exp \in C^\infty$, покажем вначале, что это диффеоморфизм в окрестности нуля. По теореме об обратной функции, достаточно показать, что $d\exp$ является отображением «на» в нуле. Если $s \in G_e$, то имеется левоинвариантное векторное поле X, такое, что $X(e)=s$. По определению, exp переводит луч, порожденный X (т. е. кривую в $\mathfrak{g}$, заданную отображением $r \to rX$), в интегральную кривую поля X, проходящую через e. Поэтому $d\exp$ переводит касательную к этому лучу в нуле в касательную к интегральной кривой поля X в e, то есть в s.

Дифференцируемость отображения exp основывается на теории дифференциальных уравнений, в силу которой решения системы дифференциальных уравнений зависят C^∞-образом от параметра, входящего C^∞-образом в эту систему (см. приложение). В нашем случае имеется система дифференциальных уравнений, определенных левоинвариантным векторным полем X, а X линейно зависит от системы линейных координат в $\mathfrak{g}$. Ч. Т. Д.

Пусть $X_1, \ldots, X_d$ — базис в $\mathfrak{g}$; отождествим $\mathfrak{g}$ и R^d как многообразие с помощью соответствия $\sum c_i X_i \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (c_1, \ldots, c_d)$. В достаточно малой окрестности U нуля в $\mathfrak{g}$ отображение exp является диффеоморфизмом, и потому его можно принять за координатное отображение. Эти координаты и координатная окрестность носят название *канонических*.

Матричный экспоненциал. Для групп матриц имеется другое экспоненциальное отображение, которое совпадает с уже определенным, если отождествить алгебру Ли данной группы матриц с соответствующей подалгеброй алгебры Ли группы всех матриц того же порядка, а именно если A есть $d \times d$-матрица, то

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} A^k \qquad (A^0 = I).$$

Можно показать, что этот ряд сходится по норме пространства $d\times d$-матриц, отождествленного с R^{d^2} причем эта сходимость даже равномерна на ограниченных множествах.

Далее, очевидно, что если $AB=BA$, то $e^{A+B}=e^Ae^B$; в частности, $e^{(s+t)A}=e^{sA}e^{tA}$, где s, t — вещественные числа, и $e^Ae^{-A}=e^0=I$. Таким образом, $e^A\in Gl(d, R)$ для всякого A, и кривая $s\to e^{sA}$ оказывается однопараметрической подгруппой. Легко видеть, что касательная в I этой однопараметрической подгруппы естественно отождествляется с $A=(d/du)(0)(e^{uA})$. Тем самым показано, что оба экспоненциальных отображения фактически совпадают. Следующая коммутативная диаграмма для $Gl(d, R)$ с отождествлением, обозначенным через «$\approx$», поясняет рассмотренные отношения:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "J", "\approx"'] \arrow[dr, "\exp"'] & & \mathfrak{gl}(d,R) \arrow[dl, "e"] \\ & Gl(d,R) & \end{tikzcd}$$

Задача 2. Проверив, что $B=\begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ не имеет квадратного корня, доказать, что exp не отображает алгебру Ли группы Ли $Sl(2, R)$ (состоящей из вещественных 2×2-матриц с определителем 1) на $Sl(2, R)$.

Ортогональная группа. Каноническая координатная окрестность единичного элемента в $O(d)$ получается взятием экспоненциалов от кососимметрических матриц, лежащих в достаточно малой окрестности нуля. За координаты кососимметрической матрицы можно принять ее элементы, расположенные выше главной диагонали. Поэтому размерность $O(d)$ есть $\frac{1}{2}d(d-1)$.

Например, $O(2)$ — одномерная группа, окрестность единичного элемента которой составляют матрицы

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

это соответствие является диффеоморфизмом при $|\theta|<\pi$.

Задача 3. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(d, R)$, $x \in R^d$. Определим C^∞-кривую σ в R^d, положив $\sigma(s)=(\exp sA)x$. Доказать, что $\sigma_*(s)=A(\exp sA)x$; здесь касательные к R^d отождествляются с элементами R^d при помощи отображения $\sum a_i D_i(y) \to (a_1, \ldots, a_d)$.

Задача 4. Пусть $<,>$ — обычное скалярное произведение в R^d, и σ_1, σ_2 — это C^∞-кривые в R^d. Пусть C^∞-функция σ определяется так: $\sigma(s)=<\sigma_1(s), \sigma_2(s)>$. С помощью теоремы 1.2 или другим способом проверить, что

$$\sigma'(s)=<\sigma_{1*}(s), \sigma_2(s)>+<\sigma_1(s), \sigma_{2*}(s)>.$$

Задача 5. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(d, R)$ — кососимметрическая матрица, $x \in R^d$; показать, что функция $<(\exp sA)x, (\exp sA)x>$ не зависит от s и, следовательно, равна $<x, x>$, своему значению при $s=0$. Таким образом, $\exp sA$ — ортогональная матрица при любом s. Докажите это непосредственно, используя только вышеуказанное отображение e.

Задача 6. Определить комплексную группу Ли. Примеры: $Gl(d, C)$, C^d и комплексный тор $T^d(C)=C^d/D$, где D — группа, порожденная $2d$ вещественно линейно независимыми сдвигами в C^d.

Задача 7. Показать, что связная компактная комплексная группа Ли является абелевой (применить обобщение теоремы о максимуме модуля) [93].

Задача 8. Пусть $U(d)=\{g \in Gl(d, C) \mid g\bar{g}^t=I\}$ — так называемая *унитарная группа*. Показать, что $U(d)$ — компактная, но не комплексная группа Ли.

2.6. Представления

Представлением группы Ли G называется гомоморфизм G в матричную группу. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли матриц.