это соответствие является диффеоморфизмом при $|\theta|<\pi$.

Задача 3. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(d, R)$, $x \in R^d$. Определим C^∞-кривую σ в R^d, положив $\sigma(s)=(\exp sA)x$. Доказать, что $\sigma_*(s)=A(\exp sA)x$; здесь касательные к R^d отождествляются с элементами R^d при помощи отображения $\sum a_i D_i(y) \to (a_1, \ldots, a_d)$.

Задача 4. Пусть $<,>$ — обычное скалярное произведение в R^d, и σ_1, σ_2 — это C^∞-кривые в R^d. Пусть C^∞-функция σ определяется так: $\sigma(s)=<\sigma_1(s), \sigma_2(s)>$. С помощью теоремы 1.2 или другим способом проверить, что

$$\sigma'(s)=<\sigma_{1*}(s), \sigma_2(s)>+<\sigma_1(s), \sigma_{2*}(s)>.$$

Задача 5. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(d, R)$ — кососимметрическая матрица, $x \in R^d$; показать, что функция $<(\exp sA)x, (\exp sA)x>$ не зависит от s и, следовательно, равна $<x, x>$, своему значению при $s=0$. Таким образом, $\exp sA$ — ортогональная матрица при любом s. Докажите это непосредственно, используя только вышеуказанное отображение e.

Задача 6. Определить комплексную группу Ли. Примеры: $Gl(d, C)$, C^d и комплексный тор $T^d(C)=C^d/D$, где D — группа, порожденная $2d$ вещественно линейно независимыми сдвигами в C^d.

Задача 7. Показать, что связная компактная комплексная группа Ли является абелевой (применить обобщение теоремы о максимуме модуля) [93].

Задача 8. Пусть $U(d)=\{g \in Gl(d, C) \mid g\bar{g}^t=I\}$ — так называемая *унитарная группа*. Показать, что $U(d)$ — компактная, но не комплексная группа Ли.

2.6. Представления

Представлением группы Ли G называется гомоморфизм G в матричную группу. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли матриц.

Если вместо группы матриц используют группу $Gl(V)$ [или алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$] линейных преобразований векторного пространства V, то говорят о *представлении на* V. В обоих случаях не исключаются матрицы с комплексными коэффициентами или векторные пространства над полем комплексных чисел. *Точное представление* — это представление, которое является изоморфизмом «в»; если группа имеет точное представление, то она изоморфна подгруппе группы матриц.

Задача 9. (а) Показать, что отображение $j: C \to Gl(2, R)$ (где C — множество комплексных чисел), определенное равенством $j(x+iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, является точным представлением группы Ли C^* ненулевых комплексных чисел с умножением как групповой операцией. Что является подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(2, R)$, соответствующей $j(C^*)$? Каковы однопараметрические подгруппы в C^*?

(б) Показать, что сужение exp на алгебру Ли группы $j(C^*)$ соответствует обычной комплексной экспоненциальной функции $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ и что группа C с аддитивной групповой операцией является односвязной накрывающей группы C^* относительно накрывающего отображения $e^{\cdot}$.

(в) Построить отображение $\varphi: C^* \to S^1 \times S^1$, такое, что $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 1)$, и являющееся гомоморфизмом группы Ли C^*, накрывающим $S^1 \times S^1$.

(г) Принимая $1, i$ за базис в C, рассматриваемом как векторное пространство над R, показать, что j соответствует «умножению на», т. е. если $\psi(a+ib) = (a, b) \in R^2$, то матрица $j(z)$ действует на $x \in R^2$ как $j(z)x = \psi(z\psi^{-1}(x))$.

Задача 10. Пусть Q^* — совокупность ненулевых кватернионов. *Регулярным левым представлением* Q^* *на* Q называется представление φ группы Q^* на вещественном векторном пространстве Q, заданное равенством $\varphi(q)q' = qq'$, где $\varphi(q)$ — «левое умножение на q».

(а) Показать, что относительно базиса 1, i, j, k (с обычной таблицей умножения) φ имеет следующую матричную форму: при $q=w+xi+yj+zk$

$$\varphi(q)=\begin{bmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{bmatrix}$$

(б) Показать, что $\varphi(q)$ ортогонально в том и только том случае, если

$$|q|=w^2+x^2+y^2+z^2=1.$$

(в) Вычислить $\det\varphi(q)$, показав, что $\varphi(q)\varphi(q)^t$ кратно I, и определив коэффициент при w^4 в $\det\varphi(q)$.

Автоморфизмы. *Автоморфизмом* группы Ли G называется изоморфизм G на себя. Множество всех автоморфизмов группы G образует некоторую группу A. Каждое $j\in A$ порождает автоморфизм dj алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{dj} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{j} & G \end{array}$$

коммутативна. Так как dj — невырожденное линейное преобразование алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то отображение $j\to dj$ переводит A в группу линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$ и, очевидно, является гомоморфизмом, поскольку $d(j\circ k)=dj\circ dk$. Короче говоря, мы получаем представление A на линейном пространстве $\mathfrak{g}$. В случае когда G связно, это представление точно, что вытекает из замечаний § 2.4. Однако мы докажем это непосредственно. Предположим, что j принадлежит ядру; это означает, что $djX=X$ при любом $X\in\mathfrak{g}$. Но поскольку $j(\exp X)=\exp(djX)$, то j обязано оставлять неподвижным образ exp, а так как этот образ содержит окрестность единичного элемента, порождающую G, то j — тождественный автоморфизм.

В действительности A является группой Ли [95, стр. 180].

Присоединенное представление. Множество внутренних автоморфизмов группы G является подгруппой в A: каждый $x \in G$ порождает внутренний автоморфизм $j_x : y \to xyx^{-1}$. Далее, отображение $x \to j_x$ является групповым гомоморфизмом. Отображение $\mathrm{Ad} : G \to Gl(\mathfrak{g})$, определенное формулой $\mathrm{Ad}(x) = dj_x$, называется *присоединенным представлением группы* G.

Предложение. Ad является представлением G на линейном пространстве $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Ad, очевидно, является групповым гомоморфизмом, так что достаточно проверить его принадлежность к C^∞ и фактически показать это в канонической координатной окрестности.

Прежде всего отметим, что при фиксированном y из G отображение $x \to j_x(y)$ принадлежит C^∞. Действительно, оно является композицией отображений, составленных из групповых операций, которые, очевидно, принадлежат C^∞:

$$x \to (x,\ x) \to (x,\ xy^{-1}) \to (x,\ yx^{-1}) \to xyx^{-1}.$$

Далее, если y принадлежит канонической координатной окрестности, то $y = \exp X$ и, в силу коммутативности вышеуказанной диаграммы, $j_x(y) = \exp(\mathrm{Ad}(x)X)$.

Если выбрать базис $X_1, \ldots, X_d$ в $\mathfrak{g}$, то $\mathrm{Ad}(x)$ задается в терминах матрицы $(a_{ij}(x)) : \mathrm{Ad}(x) X_j = \sum a_{ij}(x) X_i$. Далее, при $y = \exp(tX_j)$ получаем $j_x(y) = \exp\left(\sum ta_{ij}(x) X_i\right)$, так что каноническими координатами $j_x(y)$ являются $ta_{ij}(x)$, $i = 1, \ldots, d$, определенные при достаточно малых t. Так как $j_x(y) \in C^\infty$ по x, то это означает, что $a_{ij}(x) \in C^\infty$ при всех i, j, т. е. $\mathrm{Ad}(x) \in C^\infty$.

Центр. *Центр* группы G — это множество всех элементов G, коммутирующих с любым другим элементом из G. Ясно, что ядром группового гомоморфизма $x \to j_x$ служит как раз центр группы G, а так как представление $j_x \to dj_x$ точно, если G связна, то центр оказывается ядром присоединенного представления. Как таковое оно является замкнутой подгруппой, и поскольку эта подгруппа, очевидно, нормальна, то присоединенное представление индуцирует точное представление факторгруппы $G/$(центр G), если только G связна.

Из теоремы 3.1 будет следовать, что дифференциал присоединенного представления является *присоединенным представлением* алгебры $\mathfrak{g}$, заданным формулой $\mathrm{ad}(X)Y=[X, Y]$, так что $d(\mathrm{Ad})(X)$ — сужение производной Ли по X на $\mathfrak{g}$.

Задача 11. Взяв *полярное разложение* группы Q^*, показать, что Q^* является прямым произведением множества R^* положительных вещественных чисел и S^3, $Q^*=R^*\times S^3$. Так как R^* — центр Q^*, то ядро присоединенного представления содержит R^*, и можно считать, что пространством этого представления служит касательное пространство к S^3 в единичном элементе 1. Отождествить это пространство с подпространством в Q, порожденным i, j, k, и показать, что тогда присоединенное представление задается на S^3 так: $\psi(q)P=qPq^{-1}$, $P=xi+yj+zk$. (При $q\in S^3$ имеем $q^{-1}=\bar{q}$.) Отождествить оставшуюся часть центра Q^* и образ присоединенного представления на сфере S^3, являющейся подгруппой группы $Gl(3, R)$.

Задача 12. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — левоинвариантные векторные поля на Q^*, равные D_i, $i=1, 2, 3, 4$, в точке $1=(1, 0, 0, 0)$. (Здесь мы отождествили Q с R^4.) Показать, что

$$X_1=u_1D_1+u_2D_2+u_3D_3+u_4D_4,$$

и найти соответствующие формулы для X_2, X_3, X_4.

Задача 13. Показать, что абелева группа Ли G имеет абелеву алгебру Ли (см. задачу 3.3), а отсюда с помощью теоремы 2 доказать, что $G\approx R^d/D$, где D — дискретная подгруппа. Поэтому

$$G\approx R^e\times T^f,\ e+f=d \qquad [47, \text{стр. } 83\text{—}86].$$

Задача 14. Показать, что непрерывный гомоморфизм группы Ли принадлежит C^∞ и потому структура группы Ли есть топологический групповой инвариант [95, стр. 188].

Задача 15. Доказать, что интегральная кривая левоинвариантного поля является также интегральной кривой правоинвариантного поля.

Задача 16. Показать, что существует окрестность единичного элемента группы Ли, не содержащая никаких подгрупп, кроме тривиальной. Используя это утверждение, задачу 14 и теорему Петера — Вейля [47, стр. 99], показать, что каждая компактная группа Ли обладает точным C^∞-представлением.

Замечание о факторпространствах. В § 2.4 мы рассмотрели факторгруппы групп Ли по замкнутым нормальным подгруппам. Пусть теперь H — замкнутая подгруппа G. Тогда подгруппа H имеет индуцированную топологию, и множество левых классов смежности G/H обладает естественной структурой многообразия, такой, что проекция $\pi: G \to G/H$ принадлежит C^∞, элементы G действуют как диффеоморфизмы на G/H и $f: G/H \to R$ принадлежит C^∞ тогда и только тогда, когда $f \circ \pi \in C^\infty$.