ГЛАВА 3

Расслоения

В первом параграфе этой главы рассматриваются группы преобразований и важный частный случай скобочной операции. Далее с точки зрения групп преобразований излагается теория главных и ассоциированных расслоений, определяются также и координатные расслоения [4, 47, 51, 72].

3.1. Группы преобразований

Пусть G — группа Ли и M есть C^∞-многообразие.

Группа G *действует (дифференцируемо) слева на* M, если существует C^∞-отображение $\varphi: G\times M\to M$ (символически $\varphi(g, m)=gm$), удовлетворяющее следующим условиям:

(а) при любом $g\in G$ отображение $g: M\to M$, заданное равенством $g(m)=gm$, является диффеоморфизмом;

(б) $(gh)m=g(hm)$ для всех $g, h\in G$ и $m\in M$.

Говорят, что группа G действует *эффективно*, если из $gm=m$ при всех m вытекает, что g — единичный элемент e в G.

Группа G действует *справа* на M, если вместо (б) имеет место соотношение

(б)′ $(gh)m=h(gm)$ для всех $g, h\in G$, $m\in M$. В этом случае мы будем также писать $\varphi: M\times G\to M$.

Каждая группа Ли действует на себе слева посредством левого сдвига и внутреннего автоморфизма, а также справа — посредством правого сдвига.

Если G действует на M, то каждому $m\in M$ соответствует C^∞-отображение, также обозначаемое через m, группы G в M, определенное формулой $m(g)=gm$.

Группа G действует *транзитивно* слева, если для любых $m, n\in M$ существует $g\in G$, такое, что $g(m)=n$.

Зафиксируем точку $m \in M$; ее группа *изотропии* $H = \{g \in G \mid g(m) = m\}$ является замкнутой подгруппой в G, и отображение пространства левых классов смежности G/H в M, определенное формулой $gH \to gm$, принадлежит C^∞. Это взаимно однозначное отображение «на», если G действует транзитивно. В случае когда G/H компактно, например если G — компактно, это отображение является гомеоморфизмом.

Пример. $Gl(d, R)$ действует дифференцируемо слева на R^d и на $R^d - \{0\}$. Ее действие на $R^d - \{0\}$ транзитивно; группа изотропии точки $(1, 0, \ldots, 0)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где

$$B \in Gl(d-1, R), \quad A \in R^{d-1},$$

0 — столбец из $d-1$ нулей. Эту подгруппу H можно отождествить с *полупрямым произведением* $Gl(d-1, R)$ и R^{d-1}, в котором умножение задается формулой $(B, A)(B', A') = (BB', AB' + A')$. [В общем случае, если элементы группы G действуют как гомоморфизмы справа на группе H, *полупрямое произведение групп* G *и* H задается умножением $(g, h)(g', h') = (gg', (hg')h')$.]

Обратно, если H — замкнутая подгруппа группы G, то G действует транзитивно на G/H посредством $g(kH) = (gk)H$. Пространство с транзитивной группой преобразований называется *однородным*.

Пусть G действует на M, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G; тогда существует гомоморфизм λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\bar{\mathfrak{g}}$, алгебру Ли некоторых векторных полей на M: если $X \in \mathfrak{g}$, то $(\lambda X)(m) = dm(X(e))$. Введем обозначение: $\bar{X} = \lambda X$.

Задача 1. Доказать, что однопараметрическая группа преобразований поля $\bar{X}$ есть e^{tX}.

Если G действует эффективно, то λ взаимно однозначно.

Говорят, что G действует *свободно*, если лишь единичный элемент группы G обладает неподвижными точками на M, т. е. из равенства $gm = m$ при некоторых

$m \in M$ вытекает, что $g=e$. Если G действует свободно, то алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ состоит из необращающихся в 0 векторных полей на M. Кроме того, если N — *орбита точки* m, т. е. $N=\{gm | g \in G\}$, то для каждого $t \in N_m$ найдется единственное $X \in \mathfrak{g}$, такое, что $\bar{X}(m)=t$, так как $m: G \to M$ определяет диффеоморфизм φ многообразия G на N, и можно взять $X \in \mathfrak{g}$, для которого $X(e)=d\varphi^{-1}t$.

Задача 2. Доказать, что если $\bar{X}(m)=0$, то $e^{tX}(m)=m$ при любом t.

Дифференциалы преобразований, составляющих некоторую группу преобразований G, следующим образом действуют на $\bar{\mathfrak{g}}$:

(а) если G действует слева, то $dg(\bar{X})=\overline{\operatorname{Ad} gX}$;

(б) если G действует справа, то $dg(\bar{X})=\overline{\operatorname{Ad} g^{-1}X}$.

Доказательство (а). Прежде всего вычислим композицию отображений $g: M \to M$ и $g^{-1}m: G \to M$. Имеем $g \circ g^{-1}m(h)=g(hg^{-1}m)=ghg^{-1}m=m(j_g(h))$. Отсюда $(dg\bar{X})(m)=dg(\bar{X}(g^{-1}m))=dg \circ d(g^{-1}m)X(e)=$ $=dm \circ dj_g(X(e))=dm(\operatorname{Ad} gX)(e))=\overline{\operatorname{Ad} gX}(m)$. Ч. Т. Д.

Пусть W — линейное пространство C^∞-векторных полей на M, и $\mathscr{L}$ — некоторое конечномерное подпространство W, инвариантное относительно G, так что для каждого $g \in G$ имеем $dg(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}$. Тем самым получается представление[1]) j группы G в группу неособенных линейных преобразований пространства $\mathscr{L}$, т. е. в $Gl(\mathscr{L})$. Рассматривая алгебру $\mathfrak{gl}(\mathscr{L})$ всех линейных преобразований $\mathscr{L}$ как алгебру Ли группы $Gl(\mathscr{L})$, выпишем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{dj} & \mathfrak{gl}(\mathscr{L}) \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{j} & Gl(\mathscr{L}) \end{array}$$

[1]) Здесь мы предполагаем, что G действует слева. В случае действия справа нужно очевидным образом изменить определения, хотя формулировка следующей теоремы остается такой же.

Следующий результат имеет многочисленные применения.

Теорема 1. При любых $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathcal{L}$, $dj(X)Y = -[\overline{X}, Y]$; в частности, $[\overline{X}, Y] \in \mathcal{L}$.

Докажем вначале одно следствие о дифференциале присоединенного представления.

Следствие. Если X, Y — элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, то $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$.

Доказательство. Пусть G действует слева на себе следующим образом: для $g \in G$ отображение $g: G \to G$ определено формулой $g(h) = hg^{-1}$, так что преобразование g совпадает с $R_{g^{-1}}$, правым умножением на g^{-1}. Так как $\mathrm{Ad}\, g = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$ и любое $X \in \mathfrak{g}$ инвариантно относительно левых сдвигов dL_g, то условия теоремы выполняются при $\mathcal{L} = \mathfrak{g}$ и $j = \mathrm{Ad}$. Выразим поле $\overline{X}$ на G через $X \in \mathfrak{g}$. Для $m \in G = M$ отображение $m: G \to M$ задается, как указано выше, формулой $m(g) = g(m) = mg^{-1}$, так что $m = L_m \circ J$, где J — операция обращения. Используя лемму 2.1, находим, что $\overline{X}(m) = dL_m \circ dJ(X(e)) = dL_m(-X(e)) = -X(m)$. Поэтому $\overline{X} = -X$. Далее, $dj = d(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$, и теорема дает теперь нужный результат.

Задача 3. Вывести из этого следствия, что если G — абелева группа, то $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра.

Доказательство теоремы. Предположим, что группа действует слева. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, тогда $\gamma: t \to \exp tX$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M, и на M из дифференцирования функций вдоль ее орбит возникает векторное поле Z. Для вещественной функции f на M и $m \in M$ имеем

$$Zf(m = \frac{d}{du}(0)(f \circ m \circ \gamma) = dm(\gamma_*(0))f,$$

откуда $Z(m) = dm(X(e)) = \overline{X}(m)$.

С другой стороны, поскольку вышеуказанная диаграмма коммутативна, то

$$\exp(t\, dj(X)) = \exp(dj(tX)) = j \exp(tX).$$

Таким образом, $dj(X)Y$ является производной в 0 кривой $t \to (j \exp(tX))Y = d(\exp(tX))Y$ в $\mathscr{L}$. Но при $m \in M$ имеем $(d \exp tX(Y))(m) = d(\exp(tX))(Y(\exp(-tX)m))$, т. е. фактически дифференцируется кривая в M_m, которая задается значениями Y вдоль кривой $t \to \exp(t(-X))m$, снесенными в точку m под действием однопараметрической группы $t \to \exp(t(-X))$. Значит, мы берем производную Ли по полю $-\bar{X}$ (см. § 1.4), откуда, в силу теоремы 1.3, и следует требуемое заключение.

3.2. Главные расслоения

Мы называем (C^∞-)*главным расслоением* совокупность (P, G, M), где P, M суть C^∞-многообразия, G — группа Ли, причем

(1) G действует свободно (и дифференцируемо) справа на P, $P \times G \to P$. Отображение $g: P \to P$, $g \in G$, будет обозначаться также через R_g;

(2) M — факторпространство пространства P по отношению эквивалентности, заданному действием группы G, проекция $\pi: P \to M$ принадлежит C^∞; в частности, при $m \in M$ группа G просто транзитивна на $\pi^{-1}(m)$;

(3) P локально тривиально, т. е. для любой точки $m \in M$ найдутся такие ее окрестность U и C^∞-отображение $F_U: \pi^{-1}(U) \to G$, что F_U коммутирует с R_g для любого $g \in G$, а отображение $\pi^{-1}(U) \to U \times G$, заданное выражением $p \to (\pi(p), F_U(p))$, является диффеоморфизмом.

Пространство P называется *пространством расслоения, M — базой, G — структурной группой, $\pi^{-1}(m)$ — слоем над $m \in M$*. Отображение $p: G \to \pi^{-1}(\pi(p)) \subset P$ вида $p(g) = R_g p$ устанавливает специальный диффеоморфизм G на слой. Отметим, что в терминах F_U правое действие G на P задается правым сдвигом, т. е. если $p \to (\pi(p), F_U(p))$, то $pg \to (\pi(p), F_U(p)g)$. Это следствие того, что $F_U(pg) = F_U(p)g$.

Приведем теперь примеры расслоений.