С другой стороны, поскольку вышеуказанная диаграмма коммутативна, то

$$\exp(t\,dj(X)) = \exp(dj(tX)) = j\exp(tX).$$

Таким образом, $dj(X)Y$ является производной в 0 кривой $t \to (j\exp(tX))Y = d(\exp(tX))Y$ в $\mathscr{L}$. Но при $m \in M$ имеем $(d\exp tX(Y))(m) = d(\exp(tX))(Y(\exp(-tX)m))$, т. е. фактически дифференцируется кривая в M_m, которая задается значениями Y вдоль кривой $t \to \exp(t(-X))m$, снесенными в точку m под действием однопараметрической группы $t \to \exp(t(-X))$. Значит, мы берем производную Ли по полю $-\bar{X}$ (см. § 1.4), откуда, в силу теоремы 1.3, и следует требуемое заключение.

3.2. Главные расслоения

Мы называем (C^∞-)*главным расслоением* совокупность (P, G, M), где P, M суть C^∞-многообразия, G — группа Ли, причем

(1) G действует свободно (и дифференцируемо) справа на P, $P \times G \to P$. Отображение $g: P \to P$, $g \in G$, будет обозначаться также через R_g;

(2) M — факторпространство пространства P по отношению эквивалентности, заданному действием группы G, проекция $\pi: P \to M$ принадлежит C^∞; в частности, при $m \in M$ группа G просто транзитивна на $\pi^{-1}(m)$;

(3) P локально тривиально, т. е. для любой точки $m \in M$ найдутся такие ее окрестность U и C^∞-отображение $F_U: \pi^{-1}(U) \to G$, что F_U коммутирует с R_g для любого $g \in G$, а отображение $\pi^{-1}(U) \to U \times G$, заданное выражением $p \to (\pi(p), F_U(p))$, является диффеоморфизмом.

Пространство P называется *пространством расслоения, M — базой, G — структурной группой, $\pi^{-1}(m)$ — слоем над* $m \in M$. Отображение $p: G \to \pi^{-1}(\pi(p)) \subset P$ вида $p(g) = R_g p$ устанавливает специальный диффеоморфизм G на слой. Отметим, что в терминах F_U правое действие G на P задается правым сдвигом, т. е. если $p \to (\pi(p), F_U(p))$, то $pg \to (\pi(p), F_U(p)g)$. Это следствие того, что $F_U(pg) = F_U(p)g$.

Приведем теперь примеры расслоений.

Тривиальное расслоение (прямое произведение). Пусть G — группа Ли, M — многообразие; тогда $P=M\times G$, снабженное правым действием G на себе во втором сомножителе, $(m, g)h=(m, gh)$, является пространством расслоения некоторого главного расслоения, которое

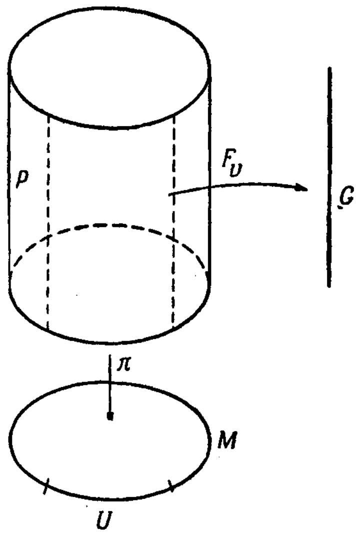

Рис. 14.

называется *тривиальным*. Главное расслоение *изоморфно* тривиальному расслоению в том и только в том случае, когда существует C^∞-сечение проекции π, т. е. такое C^∞-отображение $K:M\to P$, что $\pi\circ K$ служит тождественным преобразованием на M (см. [72], стр. 46).

Расслоение базисов. Пусть M есть C^∞-многообразие, $B(M)$ — множество $(d+1)$-наборов $(m, e_1, \ldots, e_d)$, где $m\in M$, $e_1, \ldots, e_d$ — базис в M_m, и $\pi: B(M)\to M$ задается формулой $\pi(m, e_1, \ldots, e_d)=m$. Тогда $Gl(d, R)$ следующим образом действует справа на $B(M)$: пусть $g\in Gl(d, R)$ рассматривается как матрица $g=(g_{ij})$; пусть $(m, e_1, \ldots, e_d)\in B(M)$, тогда $R_g(m, e_1, \ldots, e_d)=$ $=(m, \sum g_{i1}e_i, \ldots, \sum g_{id}e_i)$. Если $(x_1, \ldots, x_d)$ — координатная система, определенная в окрестности U точки

$m \in M$ и $m' \in U$, то $F_U(m', f_1, \ldots, f_d) = (dx_j(f_i)) = (g_{ij}) \in Gl(d, R)$. Таким образом, функции $y_i = x_i \circ \pi$ и $y_{ij} = x_{ij} \circ F_U$ дают координатную систему на $\pi^{-1}(U)$, где x_{ij} — стандартные координаты на $Gl(d, R)$ (см. § 2.2).

Вводя C^∞-структуру, заданную на $B(M)$ локальным представлением (π, F_U) в виде прямого произведения, находим, что $B(M)$ является пространством некоторого главного расслоения, называемого *расслоением базисов* многообразия M.

Иногда удобно рассматривать $B(M)$ как множество неособенных линейных преобразований пространства R^d в касательные пространства многообразия M, т. е. отождествлять $p = (m, e_1, \ldots, e_d)$ с отображением $p:(r_1, \ldots, r_d) \to \sum r_i e_i$. В этом случае естественно рассматривать $Gl(d, R)$ как группу неособенных линейных преобразований R^d, поскольку

$$pg(r_1, \ldots, r_d) = \sum_{i,j} r_i g_{ji} e_j = \sum_j \left(\sum_i r_i g_{ji} \right) e_j = p(g(r_1, \ldots, r_d)),$$

т. е. pg (как отображение) совпадает с композицией p (как отображения) и g.

Задача 4. Если $b = (m, e_1, \ldots, e_d) \in B(M)$ принадлежит координатной окрестности $\pi^{-1}(U)$, то $d\pi(D_{y_i}(b)) = \sum_j y_{ji}^{-1}(b) e_j$, где $(y_{ij}^{-1}(b))$ — матрица, обратная к матрице $(y_{ij}(b))$.

Однородные пространства. Если G — группа Ли, H — замкнутая подгруппа, то определено главное расслоение с базой G/H (пространством левых классов смежности), пространством расслоения G и структурной группой H, для которых $\pi: G \to G/H$ — каноническое отображение и правое действие есть $(g, h) \to gh$ (см. [72], стр. 37).

Примеры. (1) Пусть элементы группы $R - \{0\} = R^*$ действуют на пространстве $R^{d+1} - \{0\}$ посредством умножения. Тогда это действие дифференцируемо, свободно и просто транзитивно на орбитах. Пространство орбит есть P^d, d-мерное проективное пространство, так что

$$(R^{d+1}-\{0\},\ R^*,\ P^d) \text{ — главное расслоение.}$$

(2) Если вместо R^* воспользоваться группой положительных чисел R^+, то получится, что

$$(R^{d+1}-\{0\},\ R^+,\ S^d) \text{ — главное расслоение.}$$

(3) Если взять C^* и $C^{d+1}-\{0\}$, где C — совокупность комплексных чисел, то базой оказывается комплексное проективное пространство CP^d:

$$(C^{d+1}-\{0\},\ C^*,\ CP^d) \text{ — главное расслоение.}$$

Задача 5. Пусть (P, G, M) — главное расслоение, причем P связно. Тогда, если G_0 — компонента связности единичного элемента в G, то существует единственное главное расслоение $(P, G_0, \tilde{M})$ с тем же действием G_0 на P, где $\tilde{M}$ — связное накрытие M (см. вышеприведенные примеры 1 и 2).

Рассмотрим другой подход к главным расслоениям.

Главные координатные расслоения. Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и $\{U_i\}$ — такое открытое покрытие M, что $\pi^{-1}(U_i)$ можно представить как прямое произведение с помощью функции $F_i: \pi^{-1}(U_i)\to G$. Для i, j, таких, что $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, следующим образом определим отображение $G_{ji}: U_i\cap U_j\to G$: если $m\in U_i\cap U_j$, то, взяв $p\in\pi^{-1}(m)$, положим $G_{ji}(m)=F_j(p)(F_i(p))^{-1}$. Преобразование G_{ji} показывает, насколько сечение над U_i, соответствующее относительно F_i сечению $U_i\times\{e\}$ прямого произведения, отличается от сечения над U_j, определенного подобным образом с помощью F_j. Покажем, что определение $G_{ji}(m)$ не зависит от выбора p. Если p' тоже принадлежит $\pi^{-1}(m)$, то $p'=pg$ при некотором $g\in G$, поскольку $\pi^{-1}(m)$ является орбитой точки p, откуда

$$F_j(p')F_i(p')^{-1}=F_j(pg)F_i(pg)^{-1}=$$
$$=F_j(p)g(F_i(p)g)^{-1}=F_j(p)F_i(p)^{-1},$$

что и требовалось. Эти функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$G_{ki}(m)=G_{kj}(m)G_{ji}(m) \quad \text{для } m\in U_i\cap U_j\cap U_k. \qquad (*)$$

Функции G_{ji} называются *функциями перехода*, соответствующими покрытию $\{U_i\}$, и в действительности вместе с этим покрытием определяют главное координатное расслоение в смысле Стинрода. Поэтому расслоение в нашем смысле определяет целый класс эквивалентных координатных расслоений. Другими словами, главные координатные расслоения эквивалентны в том и только в том случае, если согласованы их правые действия. Отсюда, в силу [72, стр. 12], всякое семейство функций G_{ji}, определенное для покрытия $\{U_i\}$ и удовлетворяющее условию (*), однозначно определяет главное расслоение, функции перехода которого относительно покрытия $\{U_i\}$ совпадают с G_{ji}.

Задача 6. Пусть $\varphi: N \to M$ есть C^∞-отображение, (P, G, M)—главное расслоение; положим $\tilde{P} = \{(n, p) \in N \times P \mid \varphi(n) = \pi(p)\}$.

(а) Показать, что $\tilde{P}$ — подмногообразие многообразия $N \times P$ относительно отображения включения.

(б) Показать, что $(\tilde{P}, G, N)$ становится главным расслоением, если определить правое действие как $(n, p)g = (n, pg)$.

$(\tilde{P}, G, N)$ называется *расслоением, индуцированным отображением* φ *и расслоением* (P, G, M).

$$\begin{tikzcd} & \tilde{P} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\ N \arrow[dr, "\varphi"'] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(в) Показать, что за функции перехода для (P, G, N) можно взять $G_{ij} \circ \varphi$, так что мы могли бы определить соответствующие координатное расслоение непосредственно.

Векторные поля алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Пусть (P, G, M) — главное расслоение. Поскольку G действует свободно и эффективно, то существует изоморфизм λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, состоящую из не обращающихся в 0 векторных полей на P. В силу замечания (б) в § 3.1, имеем $dR_g(\lambda(X))=\lambda(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)$, где $g\in G$, $X\in\mathfrak{g}$.

Задача 7. Пусть $u_1, \ldots, u_{2d+2}$ — вещественные координаты на $C^{d+1}-\{0\}$ ($\{z_j=u_{2j-1}+iu_{2j}\}$ — базис, двойственный к стандартному комплексному базису пространства C^{d+1}). Вычислить $\lambda(aX_1+bX_2)$, где X_1 и X_2 — следующие левоинвариантные векторные поля на $C^*: X_1=u_1D_1+u_2D_2$, $X_2=-u_2D_1+u_1D_2$, λ — изоморфизм, ассоциированный с $(C^{d+1}-\{0\}, C^*, CP^d)$.

3.3. Ассоциированные расслоения

Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и F — многообразие, на котором G действует слева. Определим *расслоение, ассоциированное с* (P, G, M) *со слоем* F (оно также зависит от действия G на P). Пусть $B'=P\times F$; рассмотрим правое действие G на B' : $(p, f)g=(pg, g^{-1}f)$, где $p\in P$, $f\in F$, $g\in G$. Пусть $B=B'/G$ — совокупность орбит точек в B' относительно G, это и есть пространство ассоциированного расслоения. Получается следующая структура. Проекция $\pi' : B\to M$ действует по формуле $\pi'((p, f)G)=\pi(p)$. Возьмем окрестность U точки $m\in M$, такую же, как в п. (3) § 3.2, и рассмотрим отображение $F_U:\pi^{-1}(U)\to G$. Тогда возникает отображение $F'_U:\pi'^{-1}(U)\to F$ вида

$$F'_U((p, f)G)=F_U(p)f,$$

так что $\pi'^{-1}(U)$ гомеоморфно произведению $U\times F$. Определим B как многообразие, потребовав, чтобы эти гомеоморфизмы были диффеоморфизмами. Отметим, что при этом $\pi'\in C^\infty$ так же, как и естественная проекция $B'\to B$.

Ассоциированное координатное расслоение. Если для ассоциированного расслоения (B, F, G, M) определить функции перехода G'_{ji} так же, как в случае главного