тивно, то существует изоморфизм λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, состоящую из не обращающихся в 0 векторных полей на P. В силу замечания (б) в § 3.1, имеем $dR_g(\lambda(X))=\lambda(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)$, где $g\in G$, $X\in\mathfrak{g}$.

Задача 7. Пусть $u_1, \ldots, u_{2d+2}$ — вещественные координаты на $C^{d+1}-\{0\}$ ($\{z_j=u_{2j-1}+iu_{2j}\}$ — базис, двойственный к стандартному комплексному базису пространства C^{d+1}). Вычислить $\lambda(aX_1+bX_2)$, где X_1 и X_2 — следующие левоинвариантные векторные поля на $C^*: X_1=u_1D_1+u_2D_2$, $X_2=-u_2D_1+u_1D_2$, λ — изоморфизм, ассоциированный с $(C^{d+1}-\{0\}, C^*, CP^d)$.

3.3. Ассоциированные расслоения

Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и F — многообразие, на котором G действует слева. Определим *расслоение, ассоциированное с* (P, G, M) *со слоем* F (оно также зависит от действия G на P). Пусть $B'=P\times F$; рассмотрим правое действие G на B': $(p, f)g=(pg, g^{-1}f)$, где $p\in P$, $f\in F$, $g\in G$. Пусть $B=B'/G$ — совокупность орбит точек в B' относительно G, это и есть пространство ассоциированного расслоения. Получается следующая структура. Проекция $\pi': B\to M$ действует по формуле $\pi'((p, f)G)=\pi(p)$. Возьмем окрестность U точки $m\in M$, такую же, как в п. (3) § 3.2, и рассмотрим отображение $F_U: \pi^{-1}(U)\to G$. Тогда возникает отображение $F'_U: \pi'^{-1}(U)\to F$ вида

$$F'_U((p, f)G)=F_U(p)f,$$

так что $\pi'^{-1}(U)$ гомеоморфно произведению $U\times F$. Определим B как многообразие, потребовав, чтобы эти гомеоморфизмы были диффеоморфизмами. Отметим, что при этом $\pi'\in C^\infty$ так же, как и естественная проекция $B'\to B$.

Ассоциированное координатное расслоение. Если для ассоциированного расслоения (B, F, G, M) определить функции перехода G'_{ji} так же, как в случае главного расслоения, то для покрытия $\{U_i\}$, допускающего функции F'_i, имеем

$$G'_{ji}(m) = F_j(p)\,(F_i(p))^{-1} = G_{ji}(m),$$

где $m \in U_i \cap U_j$, $(p, f)\,G \in \pi'^{-1}(m)$. Следовательно, (B, F, G, M) есть класс эквивалентных координатных расслоений, ассоциированных с главным координатным расслоением в смысле Стинрода, определенным функциями перехода G_{ji} [72, часть I, § 9].

Примеры. (1) Пусть (P, G, M) — главное расслоение, и пусть G действует на себе левым сдвигом. Тогда (P, G, M) — расслоение, ассоциированное с самим собой, со слоем G.

(2) *Касательное расслоение.* Рассмотрим расслоение базисов $B(M)$. (Отметим, что расслоение часто обозначается только своим пространством расслоения.) По определению, $Gl(d, R)$ — группа неособенных линейных преобразований пространства R^d и поэтому действует на R^d слева. Пространство ассоциированного расслоения со слоем R^d обозначается через $T(M)$, а соответствующее расслоение называется *касательным расслоением* к M. Пространство $T(M)$ можно следующим образом отождествить с пространством всех пар (m, t), где $m \in M$, $t \in M_m$ [это m в (m, t) фактически не нужно, так же как и в $(d+1)$-наборах, образующих $B(M)$, но оно включается для удобства]:

$$((m, e_1, \ldots, e_d), (r_1, \ldots, r_d))\,Gl(d, R) \to (m, \textstyle\sum r_i e_i),$$

или, если рассматривать $B(M)$ как множество отображений $p: R^d \to M_m$, то при $m = \pi(p)$ то же отождествление дает $(p, x)\,Gl(d, R) \to (m, px)$, где $x \in R^d$. Из последней формулировки легко видеть, что это отождествление корректно, так как если $(p', x')\,Gl(d, R) = (p, x)\,Gl(d, R)$, то в $Gl(d, R)$ существует такое g, что $p' = pg$, $x' = g^{-1}x$, а отсюда $p'x' = (pg)(g^{-1}x) = px$, поскольку, как отображение, pg является композицией p и g.

Следовательно, слой расслоения $T(M)$ над $m \in M$ можно рассматривать как линейное пространство касательных в точке m, т. е. как M_m, а $T(M)$ — как объединение всех касательных пространств, снабженное структурой многообразия. Далее, при таком отождествлении легко указать координаты в $T(M)$, а именно пусть U — координатная окрестность в M, с координатами $x_1, \ldots, x_d$. Координаты $y_1, \ldots, y_{2d}$ на $\pi'^{-1}(U)$ определяются следующим образом: если $(m, t) \in \pi'^{-1}(U)$, то

$$\left.\begin{aligned} y_i(m, t) &= x_i(m) \\ y_{d+i}(m, t) &= dx_i(t) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots, d.$$

Теперь C^∞-векторные поля можно рассматривать как сечения проекции π'. В частности, тривиальное векторное поле (тождественно равное нулю) дает вложение M как подмногообразия в $T(M)$.

Задача 8. Доказать, что если γ есть C^∞-кривая в M, то γ_* есть C^∞-кривая в $T(M)$.

(3) *Тензорные расслоения.* Если в примере (2) заменить R^d векторным пространством, построенным из R^d средствами полилинейной алгебры, т. е. тензорным произведением пространства R^d и его сопряженного с различными кратностями или же инвариантным подпространством такого произведения, то мы получим так называемое *тензорное расслоение.* Его C^∞-сечение над открытым множеством называется *тензорным C^∞-полем* и снабжается типовыми числами, указывающими кратность R^d и его сопряженного. Группой тензорного расслоения служит группа $Gl(d, R)$; она действует независимо на сомножителях тензорного произведения, причем на R^d так же, как в случае касательного расслоения, а на сопряженном с R^d посредством транспозиции обратных: если v принадлежит сопряженному пространству, $x \in R^d$, $g \in Gl(d, R)$, то $gv(x) = v(g^{-1}x)$.

Часто в расслоении $B(M)$ структурная группа приводится к подгруппе (см. § 3.4), тогда в тензорных произведениях R^d и их сопряженных могут появиться новые инвариантные подпространства, что приводит к разнообразным тензорным расслоениям. Например, это так, когда M обладает почти комплексной структурой (см. задачу 11).

(4) *Векторные расслоения.* Это расслоения, в которых слой — векторное пространство, а структурная группа является подгруппой общей линейной группы этого пространства; таковы, в частности, тензорные расслоения. Векторные расслоения часто определяются без явного указания структурной группы, только заданием пространства расслоения в виде объединения векторных пространств одинаковой размерности, сопоставленных точкам базы, на котором определена C^∞-структура посредством гладких линейно независимых порождающих сечений над координатными окрестностями некоторого покрытия. Например, мы фактически проделали это для $T(M)$, когда расписывали координаты; в этом случае упомянутыми сечениями были координатные векторные поля D_{x_i}.

Другой пример — *расслоение факторпространств* некоторого вложения, которое в случае римановых многообразий обычно рассматривается как *нормальное расслоение* (для равномерной реализации этих факторпространств применяется риманова метрика, определенная в гл. 7). Это векторное расслоение можно получить следующим образом. Пусть $i: N \to M$ — вложение подмногообразия N в M. Слоем над $n \in N$ будет факторпространство $M_{i(n)}/di(N_n)$, а пространством расслоения — объединение этих слоев, так что пространство расслоения можно рассматривать как совокупность пар $(n, t + di(N_n))$, где $t \in M_{i(n)}$. Чтобы получить координаты, возьмем сначала координатную систему многообразия M в точке $i(n)$, скажем $x_1, \ldots, x_d$, причем можно предположить, что $x_j \circ i = y_j$, $j = 1, \ldots, d'$, образуют координатную систему в точке n и что $X_j(n) = D_{x_j}(i(n)) + di(N_n)$ линейно независимы при $j = d'+1, \ldots, d$. Тогда на некоторой окрестности U точки n векторные поля $X_j(n')$, $j = d'+1, \ldots, d$, остаются линейно независимыми, так что существует сопряженный базис $V_j(n')$[1]. Далее, для $(n', X) \in \pi'^{-1}(U)$, где π' — проекция пространства расслоения в N, определим следующим образом коорди-

[1]) Базисы $X_j(n')$ и $V_j(n')$ сопряжены друг другу, если $\langle X_i(n'), V_j(n')\rangle = \delta_{ij}$. — *Прим. перев.*

наты $z_1, \ldots, z_d$:

$$z_j(n', X) = \begin{cases} y_j(n'), & \text{если} \quad j = 1, \ldots, d', \\ V_j(n')(X), & \text{если} \quad j = d'+1, \ldots, d. \end{cases}$$

За группу этого расслоения можно принять $Gl(d—d', R)$.

(5) *Расслоения Грассмана.* Множество e-мерных подпространств пространства R^d можно снабдить такой структурой многообразия, чтобы $Gl(d, R)$ действовало очевидным образом как дифференцируемая группа преобразований слева. Расслоения, ассоциированные с $B(M)$ относительно этого действия, называются (неориентированными) *расслоениями Грассмана* многообразия M; пространство расслоения можно рассматривать как объединение e-плоскостей касательных пространств многообразия M; e-мерное C^∞-распределение является C^∞-сечением этого расслоения.

Действие главного расслоения на ассоциированном слое. Пусть (P, G, M) — главное расслоение, B — ассоциированное расслоение со слоем F. Тогда при фиксированном $p \in P$ факторпроекция $P \times F \to B$ определяет некоторое C^∞-отображение $p: F \to B$, а именно $p(f) = (p, f)G$. Оно удовлетворяет соотношению $p(gf) = (pg)f$ при любом $g \in G$. Мы уже видели это в случаях $B(M)$ и $T(M)$ (см. [72], часть I, § 8.9).

Замечание. Ассоциированное расслоение *тривиально*, если его главное расслоение тривиально. Это не эквивалентно существованию сечения ассоциированного расслоения, но обеспечивает существование семейства сечений с попарно непересекающимися областями значений, заполняющими пространство ассоциированного расслоения.

Задача 9. Проверить это, а также показать, что для векторного расслоения со слоем R^e тривиальность эквивалентна существованию e сечений, линейно независимых в каждой точке.

Хорошо известно [72], что касательное расслоение к дифференцируемому многообразию допускает не обращающееся в 0 сечение в том и только в том случае, если эйлерова характеристика многообразия равна нулю; например, если многообразие компактно и нечетномерно. Поэтому все нечетномерные сферы обладают такими сечениями; в то же время глубоким результатом Милнора и Кервера [13] является тот факт, что только S^1, S^3, S^7 имеют тривиальные касательные расслоения (т. е. *параллелизуемы*).

3.4. Приведение структурной группы

Пусть (P, G, M) — главное расслоение. Предположим, что G сепарабельно. Пусть H — подгруппа G, тогда структурная группа G *приводима к подгруппе* H в смысле Стинрода в том и только в том случае, если в классе эквивалентности, определенном посредством (P, G, M), существует координатное расслоение, функции перехода которого принимают значения в H, т. е. тогда и только тогда, когда существует покрытие $\{U_i\}$, функции перехода G_{ji} которого подчинены условию $G_{ji}(U_i \cap U_j) \subset H$.

В терминах правого действия $P \times G \to P$ это определение можно сформулировать еще и так ([51], стр. 36):

Пусть (P, G, M), (P', G', M') — главные расслоения; *послойное отображение* $f: (P, G, M) \to (P', G', M')$ — это совокупность таких C^∞-отображений (f_P, f_G, f_M), где $f_G: G \to G'$ — гомоморфизм, а $f_M: M \to M'$ и $f_P: P \to P'$ удовлетворяют соотношениям:

$$f_M \circ \pi = \pi' \circ f_P,$$

$$f_P \circ R_g = R_{f_G(g)} \circ f_P \quad \text{при любом} \quad g \in G.$$

Теперь второе определение можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2. Если (P, G, M) — главное расслоение, H — подгруппа G, то группа G приводима к H в том и только в том случае, если существует главное расслоение (P', H, M) и послойное отображение $f: (P', H, M) \to$ $\to (P, G, M)$, при котором f_M — тождественное преобразование M, f_P взаимно однозначно, а f_G — отображение включения $H \subset G$.

(Доказательство опускается.)