эйлерова характеристика многообразия равна нулю; например, если многообразие компактно и нечетномерно. Поэтому все нечетномерные сферы обладают такими сечениями; в то же время глубоким результатом Милнора и Кервера [13] является тот факт, что только S^1, S^3, S^7 имеют тривиальные касательные расслоения (т. е. *параллелизуемы*).

3.4. Приведение структурной группы

Пусть (P, G, M) — главное расслоение. Предположим, что G сепарабельно. Пусть H — подгруппа G, тогда структурная группа G *приводима к подгруппе* H в смысле Стинрода в том и только в том случае, если в классе эквивалентности, определенном посредством (P, G, M), существует координатное расслоение, функции перехода которого принимают значения в H, т. е. тогда и только тогда, когда существует покрытие $\{U_i\}$, функции перехода G_{ji} которого подчинены условию $G_{ji}(U_i \cap U_j) \subset H$.

В терминах правого действия $P \times G \to P$ это определение можно сформулировать еще и так ([51], стр. 36):

Пусть (P, G, M), (P', G', M') — главные расслоения; *послойное отображение* $f : (P, G, M) \to (P', G', M')$ — это совокупность таких C^∞-отображений (f_P, f_G, f_M), где $f_G : G \to G'$ — гомоморфизм, а $f_M : M \to M'$ и $f_P : P \to P'$ удовлетворяют соотношениям:

$$f_M \circ \pi = \pi' \circ f_P,$$

$$f_P \circ R_g = R_{f_G(g)} \circ f_P \quad \text{при любом} \quad g \in G.$$

Теперь второе определение можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2. Если (P, G, M) — главное расслоение, H — подгруппа G, то группа G приводима к H в том и только в том случае, если существует главное расслоение (P', H, M) и послойное отображение $f : (P', H, M) \to (P, G, M)$, при котором f_M — тождественное преобразование M, f_P взаимно однозначно, а f_G — отображение включения $H \subset G$.

(Доказательство опускается.)

Стинрод доказывает [72], что если (P, G, M) — главное расслоение, H — максимальная компактная подгруппа в G, то G можно привести к расслоению со структурной группой H. В частности, каждое главное расслоение со структурной группой $Gl(d, R)$ [например, $B(M)$] приводимо к расслоению, структурной группой которого является ортогональная группа $O(d)$. Мы вернемся к этому результату, когда будем рассматривать римановы метрики на многообразии.

Приведение главного расслоения очевидным образом индуцирует приведение ассоциированных расслоений, так как определение дано только в терминах функций перехода.

Задача 10. *Комплексные многообразия.* Пусть M — комплексное многообразие, $\mathcal{F}$ — семейство всех комплексных дифференцируемых функций, определенных в окрестности некоторой точки $m \in M$, $\mathcal{F}_a$ — семейство всех голоморфных функций из $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}_a$ — семейство всех функций, комплексно сопряженных с функциями из $\mathcal{F}_a$ (сопряженные голоморфные функции), $\mathcal{F}_r$ — пространство всех вещественных функций из $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_m$ — пространство комплексных линейных дифференцирований на $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}_m$ — комплексное линейное расширение пространства M_m, $\mathcal{H}_m$ — аннулятор $\overline{\mathcal{F}}_a$ в $\mathcal{T}_m$. Для $t \in \mathcal{T}_m$, $f \in \mathcal{F}$ определим $\bar{t}f = \overline{t\bar{f}}$. Показать, что

(а) $\mathcal{T}_m = \mathcal{M}_m + i\mathcal{M}_m$ (прямая сумма).

(б) $\bar{t} \in \mathcal{T}_m$ при любом $t \in \mathcal{T}_m$.

(в) $\mathcal{M}_m$ совпадает с множеством всех $t \in \mathcal{T}_m$, таких, что $t\mathcal{F}_r \subset R$.

(г) $\overline{\mathcal{H}}_m$ — аннулятор $\mathcal{F}_a$.

(д) $t = \bar{t}$ тогда и только тогда, когда $t \in \mathcal{M}_m$.

(е) $\mathcal{H}_m \cap \overline{\mathcal{H}}_m = 0$.

(ж) $\mathcal{T}_m = \mathcal{H}_m + \overline{\mathcal{H}}_m$.

(з) Если $t \in \mathcal{M}_m$, то разложение t из (ж) имеет вид $t = h + \bar{h}$, где $h \in \mathcal{H}_m$, т. е. $\mathcal{M}_m = \{h + \bar{h} \mid h \in \mathcal{H}_m\}$. Это определяет взаимно однозначное вещественное линейное отображение $P:\mathcal{M}_m\to\mathcal{H}_m$, $t\to h$.

Пусть $j:\mathcal{T}_m\to\mathcal{T}_m$ — операция умножения на i. Определим $J=P^{-1}jP$.

(и) $J^2=-1$.

(к) Выразить J в терминах вещественных координатных векторных полей, определяемых вещественной и мнимой частями комплексной координатной системы.

(л) J определено на $T(M)$ и является послойным отображением.

Почти комплексной структурой на многообразии M называется послойное отображение $J:T(M)\to T(M)$, такое, что

(1) $J(M_m)=M_m$ при любом $m\in M$.

(2) $J^2=-1$ на каждом M_m.

Это отображение J называется *комплексной структурой* комплексного многообразия M. Почти комплексная структура называется *комплексной* только в том случае, если она получена таким путем.

Задача 11. (а) Если M имеет почти комплексную структуру, то размерность M четна.

(б) M имеет почти комплексную структуру в том и только в том случае, если группу расслоения базисов можно привести к группе $Gl(d/2, C)$, представленной в $Gl(d, R)$ матрицами вида $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, которые соответствуют матрицам $(A+iB)\in Gl(d/2, C)$.

Всякое 2-мерное ориентируемое дифференцируемое многообразие допускает комплексную структуру, так что всякое 2-мерное многообразие, допускающее почти комплексную структуру, обладает комплексной структурой. Последнее не верно для многообразий более высоких размерностей [91].

Если M обладает почти комплексной структурой, то M_m+iM_m распадается в прямую сумму $\mathcal{H}_m+\overline{\mathcal{H}}_m$, где $\mathcal{H}_m$ — множество всех $x+iJx$ с $x\in M_m$. Говорят, что векторное C^∞-поле X принадлежит $\mathcal{H}$, если $X(m)\in\mathcal{H}_m$ при любом m; в этом случае пишут $X\in\mathcal{H}$. Вообще говоря, не верно, что $[X, Y] \in \mathscr{H}$ при $X \in \mathscr{H}$, $Y \in \mathscr{H}$. Однако если J — комплексная структура, то $\mathscr{H}_m$ согласуется с прежним определением и $[\mathscr{H}, \mathscr{H}] \subset \mathscr{H}$. В действительности последнее условие является также достаточным условием того, чтобы J было комплексной структурой [53].

Задача 12. Максимальными компактными подгруппами в R^* и C^* служат $\{1, -1\} = S^0$ и $\{e^{i\theta}\} = S^1$ соответственно. Показать, что приведение главных расслоений примеров (1) и (3) в § 3.2 к этим подгруппам порождает главные расслоения (S^d, S^0, P^d) и (S^{2d+1}, S^1, CP^d).

Перенести это построение на кватернионный случай, где получается кватернионное проективное пространство QP^d: (S^{4d+3}, S^3, QP^d).

В случае $d = 1$ проекции этих расслоений становятся отображениями Хопфа $S^3 \to S^2 = CP^1$, $S^7 \to S^4 = QP^1$.