*ГЛАВА 4*

# Дифференциальные формы

В этой главе с помощью алгебр Грассмана определяются дифференциальные формы, строится инвариантная формула внешнего дифференцирования, а также рассматриваются теорема Фробениуса, формы с векторными значениями и формы на комплексных многообразиях [22, 51, 79, 80, 83, 94, 95]. Другие вопросы, в частности применение дифференциальных форм к изучению топологических инвариантов, читатель найдет в [14, 16, 63].

## 4.1. Введение

В предыдущей главе мы говорили о тензорах; дифференциальные формы, предмет настоящей главы, являются частным случаем тензоров. Однако мы начнем с более явного описания дифференциальных форм в терминах грассмановых алгебр и лишь потом снова коснемся тензорного подхода (§ 4.5).

Пусть $f$ есть $C^\infty$-функция на $M$; тогда каждому $m \in M$ соответствует дифференциал $f$ в точке $m$ (§ 1.3), который является линейным функционалом на $M_m$, причем это соответствие гладко в следующем смысле. Пусть $X$ — векторное $C^\infty$-поле на $M$, тогда $df(X)(m) = df_m X(m) = Xf(m)$ определяет $C^\infty$-функцию $Xf$ на $M$. Такое гладкое соответствие линейных функций называется дифференциальной 1-формой, хотя не каждая дифференциальная форма оказывается дифференциалом некоторой $C^\infty$-функции. Но прежде чем развивать этот предмет дальше, мы должны построить некий аппарат, а именно грассмановы алгебры.