4.10. Формы на комплексных многообразиях [15, 16, 33,93].

Пусть M — комплексное многообразие, тогда дифференциальные формы определяются в терминах алгебры Грассмана над комплексным полем, и операция J (задача 3.10) на вещественных касательных пространствах индуцирует биградуировку пространства форм. В силу задачи 3.10 имеются различные касательные пространства $\mathcal{M}_m$, $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{H}_m$. Так как $\mathcal{T}_m = \mathcal{M}_m + i\mathcal{M}_m$, то J можно продолжить до комплексного линейного эндоморфизма пространства $\mathcal{T}_m$, по-прежнему удовлетворяющего условию $J^2 = -I$. Отображение, сопряженное с J, продолжается до дифференцирования J^* комплексной алгебры Грассмана $G(\mathcal{T}_m{}^*)$.

Элемент $\omega \in G^{p+q}(\mathcal{T}_m{}^*)$ называется элементом *типа* (p, q), если $J^*\omega = (p-q)i\omega$.

Если m — переменная точка в M, то получаются *комплексные дифференциальные формы типа* (p, q). Их множество обозначается через $\mathcal{K}^{p,q}(M)$. Элементы из $\mathcal{K}^{p,0}$ называются *голоморфными* p-формами.

Задача 25. Для комплексной C^∞-функции f на M определить df и показать, что это комплексная дифференциальная 1-форма.

Задача 26. Пусть $(z_1, \ldots, z_d)$ — комплексная координатная система в точке m; показать, что dz_i, $d\bar{z}_i$ вместе с 1 порождают $G(\mathcal{T}_m{}^*)$. Выразить форму типа (p, q) в терминах этих образующих и показать, что

$$G^r(\mathcal{T}_m{}^*) = \sum_{p+q=r} G^{p,q}(\mathcal{T}_m{}^*).$$

Найти $\dim G^{p,q}(\mathcal{T}_m{}^*)$.

Задача 27. Показать, что $\omega \in \mathcal{K}^{p,0}$ тогда и только тогда, когда $\omega(X_1, \ldots, X_p) = 0$, если только $X_1 \in \overline{\mathcal{H}}$.

Задача 28. Показать, что $d = d' + d''$, где $d' : \mathcal{K}^{p,q} \to \mathcal{K}^{p+1,q}$ и $d'' : \mathcal{K}^{p,q} \to \mathcal{K}^{p,q+1}$. Проверить также, что $(d')^2 = 0 = (d'')^2$ и $d'd'' = -d''d'$.

Задача 29. Показать, что на многообразии с почти комплексной структурой можно определить алгебры $\mathscr{K}^{p,q}$.

Задача 30. Для всякой почти комплексной структуры

$$d|_{\mathscr{K}^{0,1}} = d^{2,0} + d^{1,1} + d^{0,2},$$

где $d^{p,q} : \mathscr{K}^{0,1} \to \mathscr{K}^{p,q}$. Показать, что условие того, чтобы почти комплексная структура была комплексной (см. задачу 3.11), эквивалентно равенству $d^{2,0} = 0$ и, следовательно, утверждению задачи 28.

7 Зак 308