4.2. Классическое понятие дифференциальной формы

В терминах координатной системы дифференциальная форма в точке m представляет собой выражение вида $\sum a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \ldots dx_{i_p}$, где суммирование распространяется на все упорядоченные подсистемы $(i_1, \ldots, i_p)$ системы $\{1, \ldots, d\}$ и $a_{i_1 \ldots i_p}$ — вещественные числа.

Поэтому строгое определение будет включать некоторое перемножение дифференциалов с последующим линейным комбинированием таких произведений. Следовательно, M_m^* вкладывается в некоторую алгебраическую систему, обладающую и операцией умножения и векторными операциями. Кроме того, наше определение должно удовлетворять такому условию: если $(y_1, \ldots \ldots, y_d)$ — другая координатная система в точке m, то выражение $\sum b_{i_1 \ldots i_p} dy_{i_1} \ldots dy_{i_p}$, полученное из первого по обычным правилам замены переменных в кратных интегралах, должно быть в точности разложением того же алгебраического объекта в терминах нового базиса. Алгебраической системой, удовлетворяющей этим требованиям, оказывается алгебра Грассмана, к рассмотрению которой мы теперь переходим.

4.3. Алгебры Грассмана

Пусть F — поле, V — конечномерное векторное пространство над F размерности d. *Грассманова алгебра над* V — это такое множество G, что

(I) G — ассоциативная алгебра с единицей e над F;

(II) G содержит V;

(III) всякий элемент $v \in V$ удовлетворяет условию $v^2 = 0$;

(IV) G имеет размерность 2^d;

(V) G порождается единицей e и пространством V, т. е. всякий элемент G является суммой произведений скалярных кратных единицы e и элементов V.

Отметим, что $e \notin V$, поскольку $e^2 = e \neq 0$, тогда как, в силу (III), $v^2 = 0$ для всех $v \in V$. Далее, если $u, v \in V$, то